TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 2

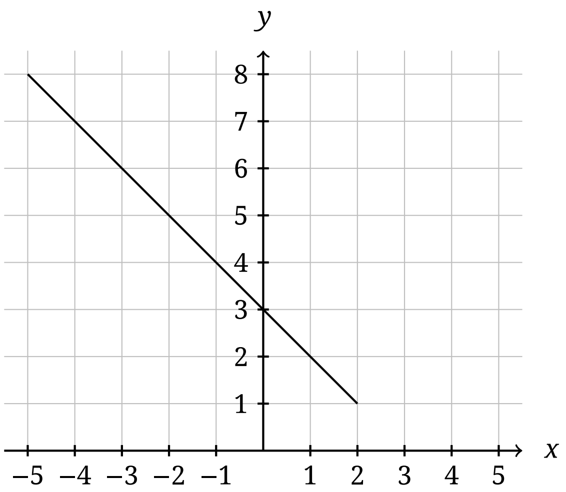
Våren 2023

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Vi har $x = x(t) = 2 - t$, $y = y(t) = t + 1$ med $0 \leq t < \infty$. Dermed om vi legger sammen:

$$x + y = 3.$$

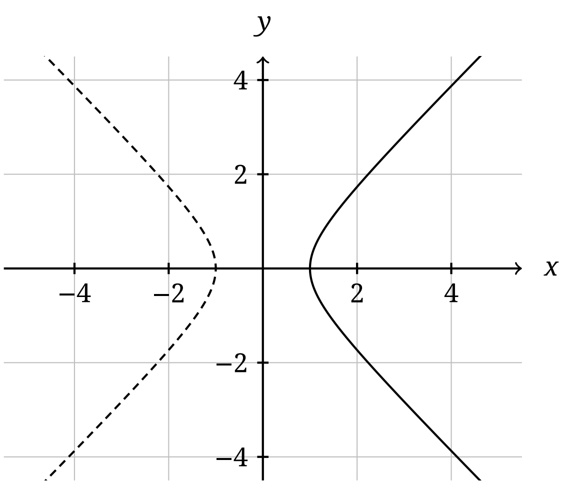
Dette er en rett linje. Siden orienteringen er positiv ved økende parameter, ser vi at x minker i positiv retning (altså er orienteringen mot venstre). Merk at den parametriserte kurven ligger på linjen, men ikke utgjør hele. Den største verdien x kan ha er nemlig gitt ved $t = 0$ som gir $x = 2$.



$\boxed{2}$ Vi bruker at $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ for alle t. Siden $x = x(t) = \cosh(t)$, $y = y(t) = \sinh(t)$ følger det at vi får hyperbelen

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Merk midlertidig at $\cosh(t) \geq 0$ for alle t slik at $x \geq 0$. Vi får altså kun den *ene delen* av hyperbelen ovenfor (høyre del).



$\boxed{3}$ Vi har at $x'(t) = -2\sin(2t) \neq 0$ når $t = \frac{\pi}{6}$. Kjerneregelen gir nå

$$y'(t) = y'(x) \cdot x'(t)$$

og dermed stigningstallet til (tangenten til) kurven i $t = \pi/6$:

$$y'(x(t))|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{y'(\pi/6)}{x'(\pi/6)} = \left.\frac{\cos(t)}{-2\sin(2t)}\right|_{t=\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}.$$

$\boxed{4}$ Vi har at $x(t) = (t-1)^4$, $y(t) = (t-1)^3$ og dermed $x^3 = y^4$. Det gir $x = x(y) = y^{4/3}$. Dermed $x'(y) = \frac{4}{3}y^{1/3}$. Denne er kontinuerlig for alle y, så kurven er glatt.

$\boxed{5}$ Vi bruker formelen for buelengden. La

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (3t^2, 2t^3), \quad t \in [0,1].$$

Vi deriverer og finner

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = (6t, 6t^2)$$

og dermed

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{6^2(t^2+t^4)} = 6t\sqrt{1+t^2}$$

der siste likhet kommer av at $\sqrt{t^2} = |t| = t$ siden $t \geq 0$. Buelengden til kurven vår blir dermed (vi bruker L til å betegne hele buelengden)

$$s(1) = L = \int_0^1 v(t)\,dt = 6\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt = 3\int_1^2 \sqrt{u}\,du = 4\sqrt{2} - 2,$$

der vi har brukt substitusjonen $u = 1 + t^2$, og der vi minner om formelen for buelengden over intervallet $[a,t]$ (buelengdefunksjonen som en funksjon av t) for kurven gitt av $\mathbf{r}(t)$ for $t \in [a,b]$ si (her har vi $a = 0, b = 1$):

$$s(t) = \int_a^t v(x)\,dx.$$

$\boxed{6}$ Fremgangsmåten er tilsvarende forrige oppgave. Vi finner med tilsvarende notasjon:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= (x'(t), y'(t)) = (3a\cos^2(t)(-\sin(t)), 3a\sin^2(t)(\cos(t))) \\ &= 3a(-\sin(t)\cos^2(t), \cos(t)\sin^2(t))\end{aligned}$$

og dermed

$$\begin{aligned}v(t) &= |\mathbf{v}(t)| \\ &= 3|a|\sqrt{\sin^2(t)\cos^4(t) + \cos^2(t)\sin^4(t)} \\ &= 3|a|\sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t))} \\ &= 3|a|\sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)} \\ &= 3|a|\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)^2} \\ &= \frac{3}{2}|a| \cdot |\sin(2t)|.\end{aligned}$$

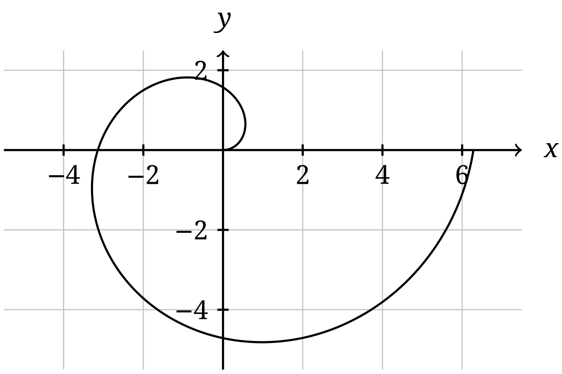
På grunn av absoluttverdien, må vi splitte opp integralet når vi tilslutt skal regne ut buelengden. Vi finner (der L er den totale buelengden vi er på jakt etter)

$$\begin{aligned}
\frac{2L}{3|a|} &= \int_0^{2\pi} |\sin(2t)|\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(2t) + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\sin(2t))\,dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin(2t)\,dt + \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-\sin(2t))\,dt \\
&= 2\left(\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\sin(2t))\,dt\right) \\
&= \left(-\cos(2t)|_0^{\pi/2} + \left(\cos(2t)|_{\pi/2}^{\pi}\right)\right) \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 \\
&= 4
\end{aligned}$$

som dermed gir

$$L = 6|a|.$$

$\boxed{7}$ Siden $r = \theta$ og θ øker fra 0 til 2π er spiralen (se figuren under) orientert mot klokken og utover fra origo med økende avstand fra origo i det vi beveger oss rundt.



Arealet innesluttet av kurven finner vi direkte ved arealformelen:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2\,d\theta = \frac{4\pi^3}{3}.$$

$\boxed{8}$ Vi bruker buelengdeformelen for en polarkurve og finner (vi bruker igjen L til å betegne buelengden som i tidligere oppgaver ovenfor)

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d}{d\theta}(a\theta)\right)^2 + (a\theta)^2}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\theta^2}\,d\theta \\
&= |a|\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\,d\theta.
\end{aligned}$$

Vi bruker nå substitusjon for å regne ut det siste integralet. Vi husker (kanskje?) at hvis vi hadde hatt integranden $1 - x^2$, så kunne det være lurt med substitusjonen $x = \sin(u)$ slik at $1 - x^2 = 1 - \sin^2(u) = \cos^2 u$. Vår situasjon nå er ganske lik, men vi har $1 + x^2$ istedenfor $1 - x^2$ (vel, vi har $x = \theta$, men det spiller naturligvis ingen rolle). Poenget er at $1 - x^2$ blir til noe fint. Tenker vi over det, kommer dette av at $1 - \sin^2(u) = \cos^2(u)$ eller med andre ord at $\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$. Har vi en liknende identitet (for noen funksjoner) men med minus istedenfor pluss? Ja det har vi, for vi har nemlig

$$\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$$

for alle u. Det betyr at $\cosh^2(u) = 1 + \sinh^2(u)$. Altså prøver vi på substitusjonen $x = \sinh(u)$ som gir $\frac{dx}{du} = \cosh(u)$. Altså finner vi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + x^2}\, dx = \int_0^b \cosh^2(u)\, du,$$

der b er slik at $\sinh(b) = 2\pi$. Bruker vi definisjonen til $\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ kan vi uten særlig store vansker regne ut integralet ovenfor. Vi ender opp med

$$\begin{aligned} \int_0^b \cosh^2(u)\, du &= \frac{1}{2}\left[(u + (\sinh u)(\cosh u)\right]_0^b \\ &= \frac{1}{2}\left(b + \sinh(b)\sqrt{1 + \sinh^2(b)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(b + 2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2}\right). \end{aligned}$$

Det gjenstår nå kun å finne eksplisitt hva b er. Vi har

$$\frac{e^b - e^{-b}}{2} = 2\pi.$$

Det vil si

$$e^b - e^{-b} = 4\pi.$$

La oss gange alt med e^b. Det gir oss

$$e^{2b} - 1 = 4\pi e^b$$

eller om vi skriver om:

$$x^2 - 4\pi x - 1 = 0$$

der vi også har satt $x = e^b$. Vi kan finne x; foreksempel ved hjelp av annengradsformelen:

$$x = \frac{4\pi \pm \sqrt{16\pi^2 + 4}}{2}$$

og siden $e^b = x$, må vi ha $x \geq 0$. Altså velger vi ovenfor plusstegnet og finner løsningen $x = \frac{4\pi + 2\sqrt{4\pi^2+1}}{2} = 2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}$. Dermed tilslutt: $b = \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right)$. Altså har vi helt tilslutt at buelengden vi var på jakt etter er gitt ved

$$L = |a|\frac{1}{2}\left(\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right) + 2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2}\right).$$