Interaktiv forelesning uke 10

Våren 2023

Alternativ for MTFYMA

Målet med denne oppgaven er å skissere et bevis for følgende resultat:

Teorem

La $\mathbf{F}$ være et glatt vektorfelt definert på en sammenhengende, åpen mengde $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Anta at linjeintegralet til $\mathbf{F}$ over en kurve kun avhenger av endepunktene til kurven, altså at for alle stykkevis glatte, orienterte kurver C og C' i D med samme start- og sluttpunkt har vi

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Da er $\mathbf{F}$ konservativt.

$\boxed{2}$ Vi lar $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ og D være som antatt i teoremet. Vår oppgave er å finne en potensialfunksjon $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ som tilfredsstiller $\nabla\varphi = \mathbf{F}$, altså $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = F_1$ og $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = F_2$. Vi har lyst til å definere φ ved å velge et punkt $(x_0, y_0) \in D$, og sette

$$\varphi(x, y) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

for en vilkårlig stykkevis glatt og orientert kurve C, som starter i (x_0, y_0) og slutter i (x, y).

a) Argumenter for at det alltid finnes en slik kurve, og at verdien $\varphi(x, y)$ ikke avhenger av hvilken kurve vi velger.

b) La $(x, y) \in D$, og la $\mathbf{r}(t), -1 \le t \le 0$ være en glatt parametrisering av en kurve $C \subseteq D$ som starter i (x_0, y_0) og slutter i (x, y). Lag en skisse som viser at

$$\mathbf{r}_h(t) = \begin{cases} \mathbf{r}(t) & -1 \le t \le 0 \\ (x + t, y) & 0 < t \le h \end{cases}$$

er en stykkevis glatt parametrisering av en kurve i D for tilstrekkelig små $h > 0$. Bruk definisjonen av linjeintegralet til å vise at

$$\varphi(x + h, y) - \varphi(x, y) = \int_0^h F_1(x + t, y)\, dt.$$

Bruk denne ligningen, og analysens fundamentalteorem til å vise at

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x + h, y) - \varphi(x, y)}{h} = F_1(x, y).$$

c) Forklar hvordan man kan modifisere argumentet i punkt **b)** for å vise at $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = F_2$.