TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 7

Våren 2023

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{1}$ I denne oppgaven får vi bruk for middelverdisetningen for dobbeltintegraler.

Teorem (Middelverdisetningen)

La $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon, $F \subseteq \mathbb{R}^2$ en lukket, begrenset og sammenhengende mengde. Da eksisterer det et punkt $(x_0, y_0) \in F$ slik at

$$\iint_F f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0)\cdot \text{Areal}(F).$$

Anta nå at $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon, og fikser et punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. La R_{hk} være rektangelet med hjørner i (a,b), $(a+h,b)$, $(a,b+k)$ og $(a+h,b+k)$. Vis at

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk} \iint_{R_{hk}} f(x,y)\,dA = f(a,b). \tag{$*$}$$

Bonusinfo

Vi har nå vist at det gir mening å tenke på integranden f som en massetetthet i to dimensjoner. En måte å forstå massetettheten i et punkt (a,b) på, er å se på regioner A_r (her, rektangeler) omkring (a,b) som krymper til (a,b). Grensen av forholdet mellom masse og areal, er massetettheten. Vi kan skrive $(*)$ som

$$\lim_{A_r\to(a,b)} \frac{\text{massen i } A_r}{\text{arealet til } A_r} = f(a,b).$$