Interaktiv forelesning uke 6

Våren 2023

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{1}$ Målet med oppgaven er å generalisere kjerneregelen (kjederegelen) i en dimensjon

$$(g(f(x))' = g'(f(x))f'(x), \tag{1}$$

til to dimensjoner. Vi ser på en funksjon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gitt ved

$$f(r,s) = \begin{bmatrix} x(r,s) \\ y(r,s) \end{bmatrix}.$$

Vi definerer den generaliserte gradienten ∇_G til f, under antagelsen at $x(r,s)$ og $y(r,s)$ har kontinuerlige førsteordens partiellderiverte.

$$\nabla_G f(r,s) = \begin{bmatrix} \partial_r x(r,s) & \partial_r y(r,s) \\ \partial_s x(r,s) & \partial_s y(r,s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

La $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en funksjon med kontinuerlige førsteordens partiellderiverte.
Vi ser på den sammensatte funksjonen $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, som er gitt ved

$$(g \circ f)(r,s) = g(x(r,s), y(r,s)).$$

a) Bruk kjerneregelen til å regne ut $\partial_r(g(x(r,s), y(r,s)))$ og $\partial_s(g(x(r,s), y(r,s)))$.

b) Vis at gradienten til $g \circ f$ kan skrives som

$$\nabla(g \circ f)(r,s) = \nabla_G f(r,s) \cdot \nabla g(x,y),$$

der $\cdot$ står for matrisemultiplikasjon og hvor ∇g er den vanlige gradienten til g.
Hint: Matriseproduktet av en matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

og en vektor

$$x = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

er

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + bq \\ cp + dq \end{bmatrix}.$$

c) Kan du gjette hva $\nabla_G(h \circ f)$ er, hvis h er en funksjon på formen $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

Bonusinfo: Invers funksjonsteorem i to dimensjoner

I Matematikk 1 ble det inverse funksjonsteoremet for en dimensjon utledet fra kjerneregelen. Hvis f er inverterbar, kan vi sette $g = f^{-1}$. Kjerneregelen (1) gir $(g(f(x)))' = (x)' = 1$, og dermed

$$f'(x)g'(f(x)) = 1, \tag{2}$$

dersom om f og g er kontinuerlig deriverbare. Vi ser at

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \text{ når } f'(x) \neq 0.$$

Fra **c)** har vi at for $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ så er

$$\nabla_G (h \circ f)(r,s) = \nabla_G f(r,s) \cdot \nabla_G h(x,y), \tag{3}$$

der $\cdot$ er matriseproduktet. At f er en inverterbar funksjon, betyr i to dimensjoner at det finnes en $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der

$$h(x,y) = \begin{bmatrix} r(x,y) \\ s(x,y) \end{bmatrix},$$

slik at

$$\begin{aligned} r(x(a,b), y(a,b)) &= b \\ s(x(a,b), y(a,b)) &= a \end{aligned}$$

I kompakt notasjon blir dette, for $\mathbf{x} = (a,b)$,

$$(h \circ f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \text{og} \quad (f \circ h)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Hvis inversen h har kontinuerlige 1. ordens partiellderiverte, får vi av (3) at

$$\nabla_G f(r,s) \cdot \nabla_G h(x,y) = \nabla_G (h \circ f)(r,s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Sammenlign (4) med (2). Høyresiden av (4) kalles identitetsmatrisen **Id**, og kjennetegnes av at den er har 1 på diagonalen og er null ellers. Ligning (4) impliserer at $\nabla_G f(r,s)$ og $\nabla_G h(x,y)$ er hverandres matriseinverser. Betingelsen om at $f'(x) \neq 0$ i en dimensjon, oversettes i to dimensjoner til at den generaliserte gradienten $\nabla_G f(r,s)$ har en matriseinvers.