Interaktiv forelesning uke 3

Våren 2023

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{2}$ I denne oppgaven skal vi studere buelengde. Vi starter med å se på en stykkvis lineær kurve. Med stykkvis lineær kurve menes det at det finnes en parametrisering $\tilde{\mathbf{r}}\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2$ og en partisjon $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ av $[0,T]$ slik at $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ er en rett linje på $[t_{i-1}, t_i]$ for alle $i \in \{1,\dots,n\}$, der $n \in \mathbb{N}$. Vi kaller $\tilde{\mathbf{r}}(t_i)$ et *knekkpunkt* for kurven for $i \in \{1,\dots,n-1\}$ og et *endepunkt* for $i \in \{0,n\}$. Buelengden er definert som

$$\tilde{s} = \sum_{i=1}^{n} |\tilde{\mathbf{r}}(t_i) - \tilde{\mathbf{r}}(t_{i-1})|\,.$$

a) Forklar hvorfor $\tilde{s}$ er uavhengig av parametriseringen $\tilde{\mathbf{r}}$. Dette betyr at buelengden, slik vi har definert den, er veldefinert. Vis at vi har følgende formel

$$\tilde{s} = \int_0^T |\tilde{\mathbf{r}}'(t)|\,dt$$

for buelengden.

Nå skal vi studere buelengde for en generell kontinuerlig deriverbar kurve C gitt ved en parametrisering $\mathbf{r}\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2$. Vi lager vi en stykkvis lineær approksimasjon $\tilde{\mathbf{r}}$ av $\mathbf{r}$, ved å velge en partisjonering $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T, m \in \mathbb{N}$, og krever at $\tilde{\mathbf{r}}(t_i) = \mathbf{r}(t_i)$ for $i \in \{1,\dots,m\}$ og at $\tilde{\mathbf{r}}$ er en rett linje mellom disse punktene. Vi definerer buelengden til C som

$$s = \lim_{\max_i |\Delta t_i| \to 0} \sum_{i=1}^{m} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|\,,$$

der $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Det vil si, buelengden til C er grensen av buelengdene til de stykkvise lineære approksimasjonene når den maksimale avstanden mellom to punkter i partisjonen $\max_i |\Delta t_i| \to 0$ går mot null. For ordens skyld skal vi anta at grensen s eksisterer. Grensen s er uavhengig av parametriseringen $\mathbf{r}$ av C, siden vi tilnærmer s med buelengden til stykkvis lineære kurver, og buelengden av disse kurvene er uavhengige av parametriseringen. Vi skal vise at

$$s = \int_0^T |\mathbf{r}'(t)|\,dt. \tag{1}$$

b) Skriv differansen mellom knekkpunktene som

$$\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) = \mathbf{r}'(t_{i-1})\Delta t_i + \mathbf{e}_i \Delta t_i$$

der $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ og

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{\Delta t_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{r}'(t)\,dt - \mathbf{r}'(t_{i-1}).$$

Hint: Bruk analysens fundamentalteorem og at

$$\int_a^b \mathbf{r}'(t)\,dt := \left(\int_a^b x'(t)\,dt, \int_a^b y'(t)\,dt\right).$$

c) Når $\max_{i\in\{1,\dots,m\}} |\Delta t_i| \to 0$ følger det av fra $\mathbf{r}'(t)$ er kontinuerlig på det lukkede intervallet $[0, T]$, at

$$\max_{i\in\{1,\dots,m\}} |\mathbf{e}_i| \to 0. \tag{2}$$

Bruk (2) for a vise at

$$\sum_{i=1}^{m} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|$$

kan skrives som en riemannsum for

$$\int_0^T |\mathbf{r}'(t)|\, dt,$$

plus et feilledd, der feilleddet konvergerer mot null når $\max_{i\in\{1,\dots,m\}} |\Delta t_i| \to 0$. Konkludér med (1). Siden venstresiden av (1) er uavhengig av parametriseringen, betyr dette at høyresiden også er uavhengig av parametriseringen.

Bonusinfo

Antakelsen fra **c)** om at $\mathbf{r}'(t)$ må være kontinuerlig på det lukkede intervallet $[0, T]$ er nødvendig. Det finnes kurver som er kontinuerlig deriverbare på et åpent intervall, som ikke har endelig buelengde. Ta for eksempel kurven gitt ved grafen

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right), \quad x \in (0, 1).$$

Funksjonen er kontinuerlig deriverbar på det åpne intervallet (0,1), men oscillerer voldsommere og voldsommere når $x \to 0^+$. Funksjonen kan ikke defineres i origo på en måte som gjør den kontinuerlig. Den kan derfor heller ikke være deriverbar i origo. Vi velger å se på partisjonen gitt ved

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= \frac{1}{n} \\ x_{2n} &= \frac{1}{1/2 + n}. \end{aligned} \qquad \text{for } n \in \mathbb{N}.$$

Disse punktene svarer til topp og bunnpunkter på grafen. Vi ser at

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1 = +\infty,$$

som impliserer at buelengden $s = +\infty$.