Interaktiv forelesning uke 13

Våren 2023

$\boxed{1}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ som er avgrenset av flatene $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, $z = 0$ og $z = 2$.
Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z, x + y, z - 1), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\mathcal{S}$ er den krumme delen av randen til T og $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ som peker ut av T.

$\boxed{2}$ Et legeme T er begrenset av planet $z - y = 1$ og paraboloiden $x^2 + (y - 1)^2 + z = 4$.

a) Skisser T og regn ut volumet av T.
(Vink: Start med å skissere T i yz-planet.)

b) La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{2}{9}x - yz\right)\mathbf{i}$, og la $\mathcal{S} = \partial T$ være overflaten til T. Bestem fluksintegralet

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ som peker ut av T.

$\boxed{3}$ Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (8x + 8x^3z, -2x^2y - 2yz^2, -12x^2z^2 - 8y^2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Finn området T i $\mathbb{R}^3$ slik at

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

er størst mulig, der ∂T er randen til T og $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til ∂T som peker ut av T.

$\boxed{4}$ Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{for} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

La $\mathcal{S}$ være kuleflaten med sentrum i $(0, 0, 0)$ og radius 1.

a) Vis at $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 0$, for $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

b) Vis at

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = -4\pi,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen som peker ut av kulen.

c) Forklar hvorfor resultatene i **a)** og **b)** ikke er i strid med divergensteoremet.