TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 12

Våren 2023

Alternativ for MTFYMA

I denne oppgaven skal vi undersøke følgende teorem fra ukens oversiktsforelesning:

Teorem 1. *Anta at* $\mathbf{F} = (P, Q)$ *er et glatt vektorfelt, definert på et enkeltsammenhengende område* $D \subset \mathbb{R}^2$*, og at* $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$*. Da er* $\mathbf{F}$ *konservativt.*

$\boxed{3}$ La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

a) Vis at $\mathbf{F}$ er rotasjonsfritt, altså at $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

b) Regn ut

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der $\mathcal{S}$ er sirkelen med radius 1, orientert mot klokken.

c) Kan $\mathbf{F}$ være konservativt? Hvordan passer dette inn med Teorem 1?

Bonusinfo

Vi gir her et bevis for Teorem 1. Beviset baserer seg på følgende resultat vi beviste i interaktiv forelesning uke 10.

Teorem 2. *La* $\mathbf{F}$ *være et glatt vektorfelt definert på en sammenhengende, åpen mengde* $D \subseteq \mathbb{R}^2$*. Anta at linjeintegralet til* $\mathbf{F}$ *over en kurve kun avhenger av endepunktene til kurven, altså at for alle stykkevis glatte, orienterte kurver* C *og* C' *i* D *med samme start- og sluttpunkt har vi*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Da er $\mathbf{F}$ *konservativt.*

Bevis for Teorem 1. Vi lar $\mathbf{F}$ være som antatt i Teorem 1, altså glatt og rotasjonsfritt på en enkeltsammenhengende mengde D. Vi skal vise at $\mathbf{F}$ tilfredstiller antagelsene i Teorem 2. Anta derfor at C og C' er to stykkevis glatte, orienterte kurver med samme startpunkt og samme sluttpunkt. Ved å først gå langs C og deretter langs C' med motsatt orientering får vi en stykkevis glatt lukket kurve vi kaller C''. Siden D er enkeltsammenhengende, finnes det et regulært område R slik at $C'' = \partial R$. Vi bruker nå Greens teorem og får at

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C''} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 0.$$

Ved å flytte og bytte får vi

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Altså er linjeintegralene til **F** kun avhengig av endepunkter, så det følger fra Teorem 2 at **F** er konservativt. $\square$