TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 12

Våren 2023

$\boxed{1}$ Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, -3y, 2z), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

ikke har et vektorpotensial, altså at det ikke finnes noe vektorfelt $\mathbf{G}$ slik at

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \operatorname{curl} \mathbf{G}(x,y,z)$$

for alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\boxed{2}$ La $\mathcal{S}_r$ være kuleflaten med sentrum i origo og radius r, og la vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,0)$. La $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalen til $\mathcal{S}_r$ som peker utover. La $V(r)$ være volumet innenfor $\mathcal{S}_r$, og definer funksjonen $f(r)$ ved

$$f(r) = \oiint_{\mathcal{S}_r} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Finn et uttrykk for $f(r)$, og bestem grenseverdien

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{f(r)}{V(r)}.$$

Sammenlign denne grenseverdien med en fysisk fortolkning av divergensen til $\mathbf{F}$.

$\boxed{3}$ La C være randen til den delen av disken med sentrum i origo og radius 1 som ligger i første kvadrant, orientert mot klokken. Bruk Greens teorem til å regne ut integralet

$$\oint_C \left(2y^2 - 4x\sqrt{x^2+y^2},\, 4xy + 2y\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot d\mathbf{r}.$$

$\boxed{4}$ La R være området i $\mathbb{R}^2$ som tilfredsstiller ulikhetene $x^2 + y^2 \le \pi^2$ og $y \ge 0$.

a) Regn ut

$$\iint_R (4 - x)\, dx\, dy.$$

b) La $C = \partial R$ være randen til R orientert mot klokken, og la C' være den krumme delen av C. Regn ut

$$\int_{C'} \left(xy + \cos\left(\frac{x}{2}\right),\, 4x + e^{y^2} + 3\arctan(y)\right) \cdot d\mathbf{r}.$$