TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 11

Våren 2023

Alternativ for MTFYMA

$\boxed{2}$ I denne oppgaven lar vi $\mathbf{F}$ være et konstant vektorfelt $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

a) La $\mathcal{S}$ være et kuleskall med radius 1. Finn en parametrisering av $\mathcal{S}$, og bruk denne til å regne ut at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

b) La $\mathcal{B}$ være en rektangulær boks. Bruk et symmetriargument til å argumentere for at

$$\iint_{\mathcal{B}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

(Vink: Del opp $\mathcal{B}$ i seks rektangulære flater.)

Bonusinfo

Det er ikke tilfeldig at disse integralene blir null. Senere i emnet skal vi lære om divergensteoremet. Det sier at hvis T er et begrenset romlig område med en stykkevis glatt flate $\mathcal{S}$ som rand, og $\mathbf{F}$ er et glatt vektorfelt definert på T, så har vi at

$$\iiint_T \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Her er $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ divergensen til et vektorfelt, det er en funksjon som er definert ved

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

I oppgavene over er $\mathcal{S}$ og $\mathcal{B}$ randen til hendholdsvis en kule og en kloss. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ var konstant, så vi har $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$. Dette gir

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iiint_T 0\, dV = 0.$$