# OVERSIKTSFORELESNING 3

- Skjema IF
- STACK-test 1: Tir 25.01, kl. 16
- Ref. gruppe: tma4105-support@math.ntnu.no

## Flervariable funksjoner (13.1)

La $D \subseteq \mathbb{R}^n$ være en undermengde.

En funksjon $f: D \to \mathbb{R}$ av $n$ (uavhengige) variabler oppgir for $\vec{x} \in D$ et unikt tall $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

$D$ kalles definisjonsmengden til $f$.

Verdimengden til $f$ er $V_f = \{ f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in D \}$.

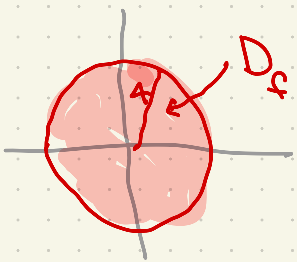
Hvis $f$ er definert ved en formel lar vi $D_f$ være den største mengden der $f$ gir mening (den naturlige definisjonsmengden)

- hvis annet ikke er oppgitt antar vi at definisjonsmengden er $D_f$.

Eks: $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

- gir mening hvis $16-x^2-y^2 > 0$ eller $x^2+y^2 < 16$

$$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 16 \}$$




$D_f$ – randen er ikke med

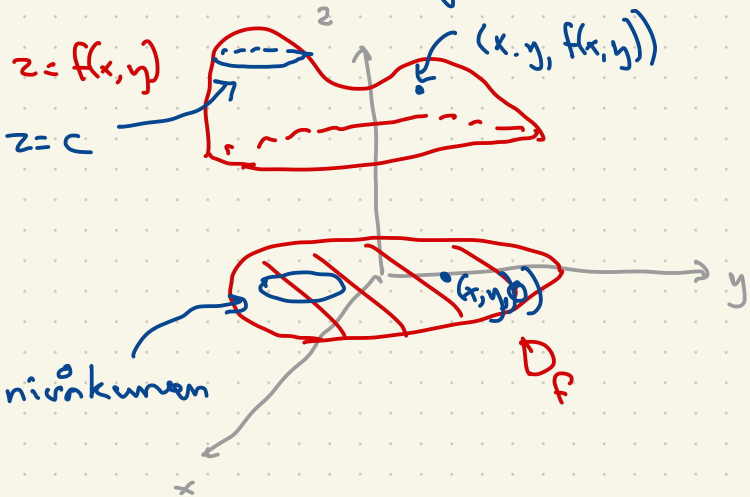
$V_f = [\frac{1}{4}, \infty)$ fordi $16-x^2-y^2 \le 16$

$$\frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

For $n = 2$ er <u>grafen</u> til $f : D \to \mathbb{R}$ er mengden
$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\{ (x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in D \}$$

– altså flaten gitt ved $z = f(x,y)$




For et gitt tall $c$ er kurven $f(x,y) = c$ i $xy$-planet
<u>nivåkurven</u> til $f$ i høyde $c$.

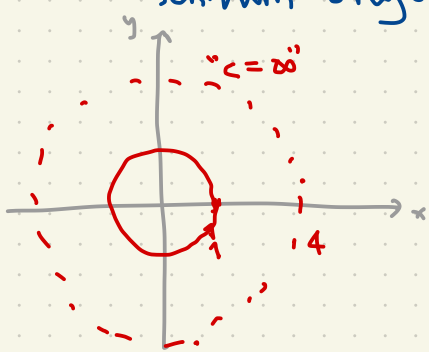
**Eks**: $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

Finn nivåkurven med høyde $c$:

$$f(x,y) = c \iff \frac{1}{16-x^2-y^2} = c^2$$

$$\iff x^2+y^2 = 16 - \frac{1}{c^2}$$

Nivåkurven er sirkelen med radius $r = \sqrt{16-\frac{1}{c^2}}$ og sentrum origo




$r = 1 \iff c = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$

Nivåkurvene tilsvarer høydekurvene i et kart hvis vi tenker på $f(x,y)$ som høyden over punktet $(x,y)$.

For $n=3$ har vi tilsvarende <u>nivåflater</u> $f(x,y,z)=c$.

<u>Grenser og kontinuitet</u> (13.2)

(Alt gir mening i alle dimensjoner $n$, men for enkelthets skyld fokuserer vi på $n=2$)

Vi sier at $L \in \mathbb{R}$ er <u>grenseverdien</u> til $f(x,y)$ i punktet $(a,b)$ og skriver

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

hvis:

(1) For hver $\delta > 0$ finnes det minst ett punkt $(x,y) \in D_f$

med $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$

$$|(x,y)-(a,b)| = |(x-a, y-b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(2) For hver $\varepsilon > 0$ finnes det $\delta > 0$ slik at

hvis $(x,y) \in D_f$ og $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$

har vi $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

Grenseverdien er entydig bestemt hvis den eksisterer.

<u>Regneregler</u>: Hvis $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$$

har vi $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \pm g(x,y) = L \pm M$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L \cdot M$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \quad \text{gitt at } M \neq 0$$

<u>Def</u>: Funksjonen $f$ er <u>kontinuerlig</u> i punktet $(a,b) \in D_f$ hvis $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Merk: Ofte nyttig å bruke polarkoordinater for å finne grenseverdier.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

$$x = a + r\cos\theta$$

$$y = b + r\sin\theta$$

Hvis $\lim_{r\to 0^+} f(a+r\cos\theta,\ b+r\sin\theta)$

eksisterer og er uavhengig av $\theta$

så er dette $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

– hvis grensen for $r \to 0$ avhenger av $\theta$ eksisterer grenseverdien $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ ikke

Eks: $f(x,y) = \dfrac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$ – regnereglene gir at $f$ er kontinuerlig i alle punkter unntatt $(0,0)$.

Eksisterer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ?

Metode 1: $f(x,y) = 1 + \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 1 + \frac{r^2\sin^2\theta}{r^2} = 1+\sin^2\theta$$

$$\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0^+}\left(1+\sin^2\theta\right) = 1+\sin^2\theta$$

– avhenger av $\theta$ $\Rightarrow$ grensen for $(x,y)\to(0,0)$ eksisterer ikke.

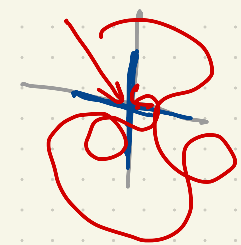
<u>Metode 2:</u> Det holder å se at vi får forskjellig verdi når vi nærmer oss $(0,0)$ fra to forskjellige retninger.

Her kan vi sjekke langs koordinataksene:

$$y=0: \quad \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{0}{x^2+0} = 1$$

$$\neq$$

$$x=0: \quad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 1 + \frac{y^2}{0+y^2} = 2$$



- grensen eksisterer ikke.

<u>Merk:</u> Denne metoden kan <u>kun</u> brukes til å vise at grensen ikke eksisterer – om vi får samme verdi kan vi ikke konkludere noe.

## Partiellderiverte (13.3)

De partiell deriverte av $f(x,y)$ i punktet $(a,b)$ med hensyn til variablene $x$ og $y$ er gitt ved henholdsvis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{d}{dx}\left(f(x,b)\right)(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{d}{dy}\left(f(a,y)\right)(b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

gitt at disse grenseverdiene eksisterer.

**Eksempel:** $f(x,y) = x e^{x^2 y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot e^{x^2 y} + x \cdot 2xy e^{x^2 y} = (1+2x^2 y) e^{x^2 y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot x^2 e^{x^2 y} = x^3 e^{x^2 y}$$

$\frac{d}{dy} e^{ay} = a e^{ay}$

for $a = x^2$

**Notasjon:** $\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x \quad (= f_1)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f = f_y \quad (= f_2)$$

**Tangentplan**

Hvis tangentplanet til $z = f(x,y)$ i punktet $(a, b, f(a,b))$ eksisterer inneholder linjene gjennom $(a, b, f(a,b))$ parallelle med $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)$, $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$

Normal: $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$

Ligningen for tangentplanet er

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right) \bullet \left(\overset{=(x,y,z)}{\vec{x}} - (a, b, f(a,b))\right) = 0$$

prikkprodukt i $\mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow \quad z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)$

<u>Eks</u>: Finn en ligning for tangentplanet til grafen til $z = f(x,y)$ der $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ i punktet $(2,2,4)$

$4 = f(2,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = 6$$

$$z = 4 + 6(x-2) + 6(y-2) = 6x + 6y - 20.$$

## <u>Høyere ordens partiell derivrte</u>

Gjentatt partiell derivasjon:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{(eller } (f_x)_x = f_{xx}\text{)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

<u>Eksempel:</u> $f(x,y) = xe^{x^2 y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1+2x^2 y)e^{x^2 y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 e^{x^2 y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x^2 \cdot e^{x^2 y} + (1+2x^2 y)\cdot x^2 e^{x^2 y}$$

$$= (2x^2 + x^2 + 2x^4 y)e^{x^2 y}$$

$$= (3x^2 + 2x^4 y)e^{x^2 y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 e^{x^2 y} + x^3 \cdot 2xy\, e^{x^2 y}$$

$$= (3x^2 + 2x^4 y)e^{x^2 y}$$

Teorem 13.1: Hvis det finnes $\delta > 0$ slik at

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ eksisterer for alle $(x,y)$ med $|(x,y)-(a,b)| < \delta$

- og begge er kontinuerlige i $(a,b)$,

så $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$.

Eks: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Vi har $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$

– her er de andreordens partiellderiverte ikke kontinuerlige i $(0,0)$

## Kvadratiske flater (10.5)

En kvadratisk flate er en flate gitt ved en andregradsligning i 3 variabler:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

$(A, \dots, J \in \mathbb{R})$

Eks: $z = x^2 + 4y^2$

$z = c$ : $c = x^2 + 4y^2$ – ellipse

$x = c$ : $z = c^2 + 4y^2$ – parabel

$y = c$ : $z = x^2 + 4c^2$ – parabel

"Elliptisk paraboloide"

Muligheter:

- sylinder
  - elliptisk f.eks. $y^2 + 2z^2 = 1$
  - parabolsk $z = y^2$
  - hyperbolsk $x^2 - z^2 = 1$
- paraboloide
  - elliptisk $x^2 + y^2 = z$
  - hyperbolsk $x^2 - y^2 = z$
- ellipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$
- kjegle $x^2 + 2y^2 = z^2$
- hyperboloide
  - sammenhengende $x^2 + 2y^2 = z^2 + 1$
  - usammenhengende $x^2 + 2y^2 = z^2 - 1$