OVERSIKTSFORELESNING 2

Vektorvaluerte funksjoner (12.1)

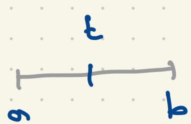
Def: En vektorvaluert funksjon (i én variabel) er en funksjon

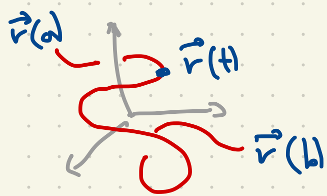
$$\vec{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

der $I \subseteq \mathbb{R}$ er et intervall og $n \in \mathbb{N}$

Kan skrive $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$ der $r_i : I \to \mathbb{R}$

(Skalarvaluert funksjon for $n=1$)





For $n=3$ skriver vi ofte $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$= x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{j}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{r}$ er en parametrisert kurve i $\mathbb{R}^n$

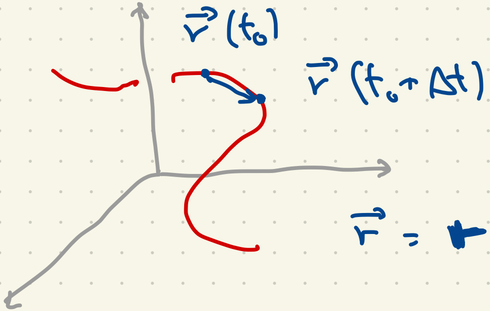
Kan tenke på $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ som posisjonen til en partikkel som funksjon av tid t

<u>Def</u>: En vektorvaluert funksjon $\vec{r}$ er <u>kontinuerlig</u> hvis hvis alle komponentene $(r_1, \dots, r_n)$ er kontinuerlige, og <u>deriverbar</u> i t_0 hvis

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

eksisterer.

<u>Merk</u>: $\vec{r}$ er deriverbar hvis og bare hvis komponentene er deriverbare.



Vektoren $\vec{r}\,'(t_0)$ er tangent til kurven i punktet $\vec{r}(t_0)$

$\vec{r} = \underline{r}$

Tenker vi på $\vec{r}(t)$ som partikkelposisjon er

$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ $(\dot{\vec{r}}(t))$ **hastighetsvektoren** til partikkelen

- retningen angir retningen partikkelen beveger seg i momentant
- $v(t) = |\vec{v}(t)| = |\vec{r}\,'(t)|$ er **farten** til partikkelen

Hvis $\vec{r}\,'(t)$ er deriverbar er $\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t)$ **akselerasjonen**

Eksempel: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$

- kurven ligger på en sylinder med radius 1 om z-aksen

- den er en spiral fra $(1,0,0)$ til $(1,0\ 2\pi)$, orientert mot klokka

$\vec{r}$ er kontinuerlig og deriverbar

$$\vec{r}\,'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 1) = \vec{v}(t)$$

$$v(t) = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$ – konstant fart

$$\vec{r}\,''(t) = (-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$

Merk: $\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}\,''(t) = 0$ eller $\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t)$

– dette er alltid tilfelle når farten er konstant.

Teorem 12.1: Lysark

Bevis: Vanlige regneregler for derivasjon i 1 variabel anvendt på komponentene.

(f) $$\frac{d}{dt}|\vec{u}(t)| = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)\right)^{-1/2}\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)\right)$$

$$= \frac{1}{2|\vec{u}(t)|}\left(\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{u}(t) + \vec{u}(t)\cdot\vec{u}\,'(t)\right)$$

$$= \frac{\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{u}(t)}{|\vec{u}(t)|} \qquad \square$$

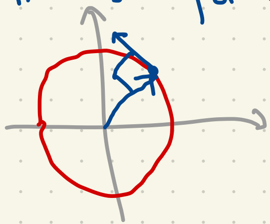
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$$

<u>Merk</u>: Hvis $|\vec{u}(t)|$ er konstant får vi

$$\frac{\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{u}(t)}{|\vec{u}(t)|} = \frac{d}{dt}|\vec{u}(t)| = 0$$

$\Rightarrow \quad \vec{u}\,'(t) \cdot \vec{u}(t) = 0$ eller $\vec{u}\,'(t) \perp \vec{u}(t)$

$n=2$: Kurven ligger på en sirkel med sentrum origo



Parametrisering og buelengde (12.3)

Parametriseringen $\vec{r}(t)$ av kurven C er glatt hvis $\vec{r}\,'(t)$ er kontinuerlig og $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ for alle t

(Dette medfører at C har en kontinuerlig varierende tangent.)

For $\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ og $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ der $f(c) = a$, $f(d) = b$

og $f'(u) > 0$ for $u \in [c,d]$

(f er strengt stigende og tar $[c,d]$ én-én-tydig til $[a,b]$)

Hvis $\vec{r}$ er en parametrisering av en kurve C || bijektiv, for $x \in [a,b]$ er det en unik $u \in [c,d]$ slik at $f(u) = x$

så er $\vec{r} \circ f$ også en parametrisering av den samme kurven C

<u>Eksempel:</u> Vis at $\vec{r}_1(u) = (2\cos u, 2\sin u)$, $0 \leq u \leq \pi$

$$\vec{r}_2(t) = (-t, \sqrt{4-t^2}) \quad -2 \leq t \leq 2$$

beskriver den samme kurven i $\mathbb{R}^2$.

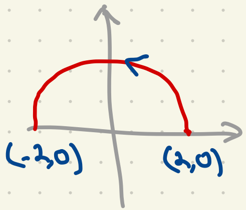
$$\sqrt{4\cos^2 u + 4\sin^2 u} = |\vec{r}_1(u)| = 2 = |\vec{r}_2(t)|$$

- begge ligger på sirkelen med radius 2 og sentrum origo

og går fra $\vec{r}_1(0) = (2,0) = \vec{r}_2(-2)$

$$\vec{r}_1(\pi) = (-2,0) = \vec{r}_2(2)$$

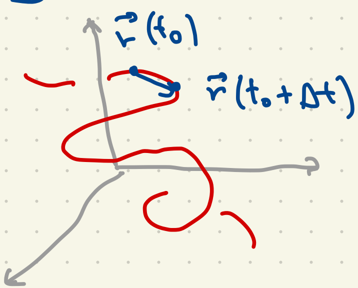
La $f(u) = -2\cos u$ for $0 \le u \le \pi$



$$f(0) = -2, \quad f(\pi) = 2$$

$$\vec{r}_2(f(u)) = \left(2\cos u, \sqrt{4-(2\cos u)^2}\right) = (2\cos u, 2\sin u)$$
$$= \vec{r}_1(u).$$

Buelengde: $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$



$$\Delta s \approx |\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)| \quad (\Delta t \geq 0)$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \left| \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} \right|$$

$$\rightsquigarrow \frac{ds}{dt} = |\vec{r}\,'(t)|$$

og $s = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt$

<u>Merk</u>: Buelengden er uavhengig av parametriseringen

(F.eks hvis $\vec{q}(u) = \vec{r}(f(u))$, $f'(u) > 0$

$$|\vec{q}\,'(u)| = |\vec{r}\,'(f(u)) \cdot f'(u)| = |\vec{r}\,'(f(u))|\, f'(u)$$

$$\int |\vec{q}\,'(u)|\, du = \int |\vec{r}\,'(f(u))|\, f'(u)\, du = \int |\vec{r}\,'(t)|\, dt \;)$$

$t = f(u) \quad dt = f'(u)\, du$

Buelengden fra a til t er

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}\,'(\tau)|\, d\tau$$

Hvis vi har en glatt parametrisering er $s'(t) = |\vec{r}\,'(t)| > 0$

$\Rightarrow$ s er strengt økende og én-én-tydig

$\Rightarrow$ vi kan invertere s og skrive t som en funksjon av buelengden s – kan bruke dette til å reparametrisere kurven som funksjon av buelengde:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}\,(t(s))$$

Eksempel: $\vec{r}(t) = \dfrac{1}{1+t^2}(1-t^2,\ 2t)$ $\quad t \geq 0$. Finn $\vec{r}(s)$:

$$\vec{r}\,'(t) = \frac{2}{(1+t^2)^2}(-2t,\ 1-t^2)$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \frac{2}{1+t^2}$$

$$s(t) = \int_0^t |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^t \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\arctan t$$

$$t(s) = \tan\frac{s}{2}$$

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s)) = \frac{1}{1+\tan^2\frac{s}{2}}\left(1-\tan^2\frac{s}{2},\ 2\tan\frac{s}{2}\right)$$

$$= \cos^2\frac{s}{2}\left(1-\tan^2\frac{s}{2},\ 2\tan\frac{s}{2}\right)$$

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \left(\cos^2\frac{s}{2}-\sin^2\frac{s}{2},\ 2\cos\frac{s}{2}\sin\frac{s}{2}\right)$$

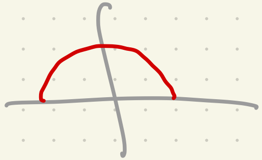
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$$

$$= (\cos s,\ \sin s)$$

$$t = 0 \longleftrightarrow s = 0$$

$$t = \infty \longleftrightarrow s = \pi$$

$\Rightarrow$ kurvan går längs sirkelen med radius 1 sentrum origo fra 0 til π



Krumning (12.4 og 12.5)

For en glatt parametrisering $\vec{r}(t)$ er enhetstangenten

$$\hat{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$$

Siden $s'(t) = |\vec{r}\,'(t)| > 0$ har vi

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \hat{T}(s)$$

Def: Krumningen er gitt ved

$$\kappa(s) = |\hat{T}'(s)| = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$$

Vi har $\kappa = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\hat{T}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right| = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|$

[Trenger ikke å finne buelengdeparametrisering for å regne ut κ]

<u>Eks</u>: Hvis $\kappa(s) = 0$ er $\hat{T}$ konstant $\Leftrightarrow$ kurven ligger på en rett linje med tangent $\hat{T}$

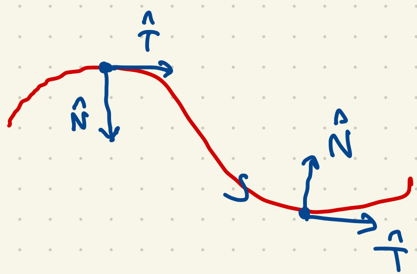
<u>Enhetsnormalen</u> er $\hat{N}(s) = \frac{\hat{T}'(s)}{|\hat{T}'(s)|}$

- angir retningen kurven krummer seg i

$$\hat{N} = \frac{d\hat{T}/ds}{|d\hat{T}/ds|} = \frac{d\hat{T}/dt \cdot dt/ds}{|d\hat{T}/dt \cdot dt/ds|} = \frac{1}{|d\hat{T}/dt|}\frac{d\hat{T}}{dt}$$

<u>Merk:</u> $|\hat{T}(s)| = 1$ konstant $\Rightarrow$ $\hat{T}'(s) \perp \hat{T}(s)$

$\Rightarrow$ $\hat{N}(s) \perp \hat{T}(s)$



– enhetsnormalen er normal til tangenten

<u>Eks:</u> $\vec{r}(s) = \left(R\cos\frac{s}{R},\ R\sin\frac{s}{R}\right)$ $0 \leq s \leq 2\pi R$

– buelengdeparametrisering av sirkel med radius R om origo

$$\hat{T}(s) = \vec{r}\,'(s) = \left(-\sin\frac{s}{R},\ \cos\frac{s}{R}\right)$$

$$\hat{T}'(s) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R} \right)$$

$$\kappa(s) = |\hat{T}'(s)| = \frac{1}{R}$$

Kurver i $\mathbb{R}^3$

$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$ er **binormalen**

$$\vec{v} = v\hat{T}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\frac{d\hat{T}}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\underbrace{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|}_{= v\kappa}\hat{N} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v^2\kappa\hat{N}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \left(v\hat{T}\right) \times \left(\frac{dv}{dt}\hat{T} + v^2 \kappa \hat{N}\right) = v^3 \kappa \hat{B}$$

$$\Rightarrow \quad \kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3} = \frac{|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|^3}$$

$\left(|\hat{B}| = 1 \right)$ fordi $|\hat{T}| = |\hat{N}| = 1$ og $\hat{T} \perp \hat{N}$

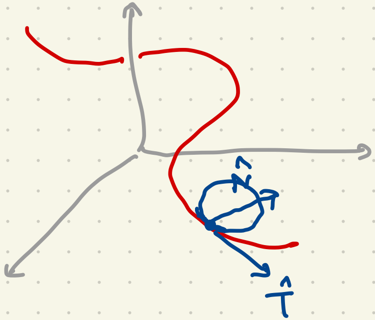
<u>Smygplanet</u> til kurven i punktet $\vec{r}(t)$ er planet spent ut av $\hat{T}(t)$ og $\hat{N}(t)$

(Osculating plane)

<u>Smygsirkelen</u> i dette punktet er sirkelen som

- tangerer kurven i punktet
- har samme $\hat{T}$, $\hat{N}$ og κ

(Osculating circle)


$\hat{N}$
$\hat{T}$