# TMA4105 MATEMATIKK 2

## Oversiktsforelesning 12
## Divergensteoremet

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

28./29. mars 2022

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

# Nøkkelbegreper

- Divergensteoremet i $\mathbb{R}^2$
- Divergensteoremet i $\mathbb{R}^3$

# Greens teorem og divergensteoremet i $\mathbb{R}^2$

- $R \subseteq \mathbb{R}^2$ er et regulært område med rand $C = \partial R$.

# Greens teorem og divergensteoremet i $\mathbb{R}^2$

- $R \subseteq \mathbb{R}^2$ er et regulært område med rand $C = \partial R$.
- $C$ er positivt orientert og består av et endelig antall glatte, enkle, lukkede kurver.

# Greens teorem og divergensteoremet i $\mathbb{R}^2$

- $R \subseteq \mathbb{R}^2$ er et regulært område med rand $C = \partial R$.
- $C$ er positivt orientert og består av et endelig antall glatte, enkle, lukkede kurver.
- $\mathbf{F} = (P, Q)$ er et glatt vektorfelt på $R$.

# Greens teorem og divergensteoremet i $\mathbb{R}^2$

- $R \subseteq \mathbb{R}^2$ er et regulært område med rand $C = \partial R$.
- $C$ er positivt orientert og består av et endelig antall glatte, enkle, lukkede kurver.
- $\mathbf{F} = (P, Q)$ er et glatt vektorfelt på $R$.

**Teorem 17.6 (Greens teorem)**

Vi har

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

# Greens teorem og divergensteoremet i $\mathbb{R}^2$

- $R \subseteq \mathbb{R}^2$ er et regulært område med rand $C = \partial R$.
- $C$ er positivt orientert og består av et endelig antall glatte, enkle, lukkede kurver.
- $\mathbf{F} = (P, Q)$ er et glatt vektorfelt på $R$.

### Teorem 17.6 (Greens teorem)

Vi har

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

### Teorem 17.7 (Divergensteoremet i $\mathbb{R}^2$)

Vi har

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} \, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $C$ som peker ut av $R$.

# Greens teorem og divergensteoremet i $\mathbb{R}^2$

- $R \subseteq \mathbb{R}^2$ er et regulært område med rand $C = \partial R$.
- $C$ er positivt orientert og består av et endelig antall glatte, enkle, lukkede kurver.
- $\mathbf{F} = (P, Q)$ er et glatt vektorfelt på $R$.

## Teorem 17.6 (Greens teorem)

Vi har

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

## Teorem 17.7 (Divergensteoremet i $\mathbb{R}^2$)

Vi har

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA = \iint_R \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA,$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $C$ som peker ut av $R$.

# Bevis for Greens teorem 1

- Hvis $R$ er $y$-enkelt, skal vi se at

$$\oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA.$$

# Bevis for Greens teorem 1

- Hvis $R$ er $y$-enkelt, skal vi se at
$$\oint_C (P,0)\cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dA.$$
- Hvis $R$ er $x$-enkelt, får vi på samme måte at
$$\oint_C (0,Q)\cdot d\mathbf{r} = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA.$$

# Bevis for Greens teorem 1

- Hvis $R$ er $y$-enkelt, skal vi se at
$$\oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA.$$
- Hvis $R$ er $x$-enkelt, får vi på samme måte at
$$\oint_C (0, Q) \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA.$$
- Om $R$ er både $x$- og $y$-enkelt får vi Greens teorem ved å regne ut
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} + \oint_C (0, Q) \cdot d\mathbf{r}$$

# Bevis for Greens teorem 1

- Hvis $R$ er $y$-enkelt, skal vi se at

$$\oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA.$$

- Hvis $R$ er $x$-enkelt, får vi på samme måte at

$$\oint_C (0, Q) \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA.$$

- Om $R$ er både $x$- og $y$-enkelt får vi Greens teorem ved å regne ut

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} + \oint_C (0, Q) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA + \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA$$

# Bevis for Greens teorem 1

- Hvis $R$ er $y$-enkelt, skal vi se at
$$\oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA.$$
- Hvis $R$ er $x$-enkelt, får vi på samme måte at
$$\oint_C (0, Q) \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA.$$
- Om $R$ er både $x$- og $y$-enkelt får vi Greens teorem ved å regne ut
$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} + \oint_C (0, Q) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA + \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA \\ &= \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.\end{aligned}$$

# Bevis for Greens teorem 2

- Hvis $R$ er $y$-enkelt, vil vi vise at

$$\oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA.$$

# Bevis for Greens teorem 2

- Hvis $R$ er $y$-enkelt, vil vi vise at

$$\oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA.$$

- Vi kan beskrive $R$ som

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x)\}$$

# Bevis for Greens teorem 2

- Hvis $R$ er $y$-enkelt, vil vi vise at
$$\oint_C (P,0)\cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA.$$
- Vi kan beskrive $R$ som
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b, \quad c(x)\le y\le d(x)\}$$
- Vi får da
$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA$$

# Bevis for Greens teorem 2

- Hvis $R$ er $y$-enkelt, vil vi vise at

$$\oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA.$$

- Vi kan beskrive $R$ som

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x)\}$$

- Vi får da

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx$$

# Bevis for Greens teorem 2

- Hvis $R$ er $y$-enkelt, vil vi vise at

$$\oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA.$$

- Vi kan beskrive $R$ som

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x)\}$$

- Vi får da

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx = \int_a^b [P(x, y)]_{y=c(x)}^{y=d(x)}\, dx$$

# Bevis for Greens teorem 2

- Hvis $R$ er $y$-enkelt, vil vi vise at

$$\oint_C (P, 0) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} \, dA.$$

- Vi kan beskrive $R$ som

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x)\}$$

- Vi får da

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} \, dA &= \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \frac{\partial P}{\partial y} \, dy \, dx = \int_a^b \left[P(x, y)\right]_{y=c(x)}^{y=d(x)} \, dx \\ &= \int_a^b P(x, d(x)) \, dx - \int_a^b P(x, c(x)) \, dx. \end{aligned}$$

# Bevis for Greens teorem 3

- Anta at vi kan dele $R$ i $R_1$ og $R_2$ der vi vet at Greens teorem gjelder for $R_1$ og $R_2$.

# Bevis for Greens teorem 3

- Anta at vi kan dele $R$ i $R_1$ og $R_2$ der vi vet at Greens teorem gjelder for $R_1$ og $R_2$.
- Vi får da

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

# Bevis for Greens teorem 3

- Anta at vi kan dele $R$ i $R_1$ og $R_2$ der vi vet at Greens teorem gjelder for $R_1$ og $R_2$.
- Vi får da

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_{R_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{R_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

# Bevis for Greens teorem 3

- Anta at vi kan dele $R$ i $R_1$ og $R_2$ der vi vet at Greens teorem gjelder for $R_1$ og $R_2$.
- Vi får da

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \oint_{\partial R_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\partial R_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

# Bevis for Greens teorem 3

- Anta at vi kan dele $R$ i $R_1$ og $R_2$ der vi vet at Greens teorem gjelder for $R_1$ og $R_2$.
- Vi får da

$$\begin{aligned}\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA &= \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\ &= \oint_{\partial R_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\partial R_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.\end{aligned}$$

- Det gjenstår å se at

$$\oint_{\partial R_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\partial R_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

# Divergensteoremet i $\mathbb{R}^3$

- $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ er et regulært område med rand $S = \partial\mathcal{R}$.

# Divergensteoremet i $\mathbb{R}^3$

- $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ er et regulært område med rand $S = \partial\mathcal{R}$.
- $S$ er en lukket orienterbar glatt flate der enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ peker *ut* av $\mathcal{R}$.

# Divergensteoremet i $\mathbb{R}^3$

- $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ er et regulært område med rand $S = \partial\mathcal{R}$.
- $S$ er en lukket orienterbar glatt flate der enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ peker *ut* av $\mathcal{R}$.
- $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ er et glatt vektorfelt på $\mathcal{R}$.

# Divergensteoremet i $\mathbb{R}^3$

- $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ er et regulært område med rand $S = \partial\mathcal{R}$.
- $S$ er en lukket orienterbar glatt flate der enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ peker *ut* av $\mathcal{R}$.
- $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ er et glatt vektorfelt på $\mathcal{R}$.

**Teorem 17.8**
Vi har

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV.$$

# Bevis for Divergensteoremet 1

- Hvis $\mathcal{R}$ er $z$-enkelt, skal vi vise at

$$\iint_S (0,0,R)\cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

# Bevis for Divergensteoremet 1

- Hvis $\mathcal{R}$ er $z$-enkelt, skal vi vise at

$$\iint_S (0,0,R)\cdot \widehat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV.$$

- Hvis $\mathcal{R}$ er $x$- og $y$-enkelt, får vi på samme måte at

$$\iint_S (P,0,0)\cdot \widehat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial x}\,dV, \qquad \iint_S (0,Q,0)\cdot \widehat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV.$$

# Bevis for Divergensteoremet 1

- Hvis $\mathcal{R}$ er $z$-enkelt, skal vi vise at

$$\iint_S (0,0,R)\cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

- Hvis $\mathcal{R}$ er $x$- og $y$-enkelt, får vi på samme måte at

$$\iint_S (P,0,0)\cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial x}\, dV, \qquad \iint_S (0,Q,0)\cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV.$$

- Om $\mathcal{R}$ er både $x$-, $y$- og $z$-enkelt får vi divergensteoremet ved å legge sammen disse tre ligningene.

# Bevis for Divergensteoremet 2

- Hvis $\mathcal{R}$ er $z$-enkelt, skal vi vise at

$$\iint_S (0,0,R) \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

# Bevis for Divergensteoremet 2

- Hvis $\mathcal{R}$ er $z$-enkelt, skal vi vise at

$$\iint_S (0, 0, R) \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

- Vi kan beskrive $\mathcal{R}$ som

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}.$$

# Bevis for Divergensteoremet 2

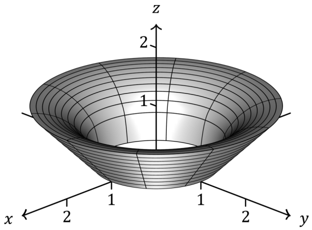
- Hvis $\mathcal{R}$ er $z$-enkelt, skal vi vise at
$$\iint_S (0,0,R)\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV.$$
- Vi kan beskrive $\mathcal{R}$ som
$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D,\ f(x,y)\le z\le g(x,y)\}.$$
- Da får vi
$$\iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\,dA$$

# Bevis for Divergensteoremet 2

- Hvis $\mathcal{R}$ er $z$-enkelt, skal vi vise at
$$\iint_S (0,0,R)\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV.$$
- Vi kan beskrive $\mathcal{R}$ som
$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D,\ f(x,y)\le z\le g(x,y)\}.$$
- Da får vi
$$\iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\,dA$$
$$= \iint_D R(x,y,g(x,y))\,dA - \iint_D R(x,y,f(x,y))\,dA.$$

# Eksempel

- La $T$ være området som ligger innenfor torusen $z^2 + (r-2)^2 = 1$ og over kjeglen $z = r - 1$ (i sylinderkoordinater)
- La $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - y, yz + x, x^2 + y^2)$
- Finn $\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, der $\widehat{\mathbf{N}}$ peker ut av $T$.



# Eksempel

- La $T$ være området som ligger innenfor torusen $z^2 + (r-2)^2 = 1$ og over kjeglen $z = r - 1$ (i sylinderkoordinater)
- La $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - y, yz + x, x^2 + y^2)$
- La $S_1$ være den delen av $\partial T$ som ligger på kjeglen og $S_2$ den delen som ligger på torusen.
- Finn $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, der $\widehat{\mathbf{N}}$ peker ut av $T$.

# Eksempel

- La $S$ være overflaten av tetraederet $T$ med hjørner i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$.
- La $\mathbf{F}(x, y, z) = (6xz, 0, (x-1)^2 + e^{y \cos x})$.
- Finn $\iint_S \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, der $\widehat{\mathbf{N}}$ peker ut av $T$.