TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 11
Divergens, curl og Greens teorem

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

21./22. mars 2022

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Nøkkelbegreper

- Divergensen til et vektorfelt
- Curlen til et vektorfelt
- Vektorpotensial
- Greens teorem

Tolkning av div

La $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ være et glatt vektorfelt definert i en omegn av $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Teorem 17.1

La $\mathcal{S}_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^3$ være sfæren med sentrum $\mathbf{p}$ og radius ϵ, med $\hat{\mathbf{N}}$ enhetsnormalen som peker utover. Da er

$$(\operatorname{div} \mathbf{F})(\mathbf{p}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

(fluks per volum av $\mathbf{F}$ gjennom $\mathcal{S}_\epsilon$ når ϵ går mot 0).

Tolkning av curl

La $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ være et glatt vektorfelt definert i en omegn av $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Teorem 17.2
La $\mathcal{C}_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^3$ være sirkelen med sentrum $\mathbf{p}$, radius ϵ, i planet med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$. Da er

$$(\operatorname{curl} \mathbf{F})(\mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{N}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

(sirkulasjon per areal av $\mathbf{F}$ langs $\mathcal{C}_\epsilon$ når ϵ går mot 0).

Eksempler på div og curl i fysikk

Maxwells ligninger for elektromagnetisme:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Eksempler på div og curl i fysikk

Bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

Her kalles $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \operatorname{div} \nabla$ for *Laplace-operatoren*.

Regneregler for div og curl

Teorem 17.3

La f, g være skalarfelt og **F**, **G** vektorfelt. For (g)–(i) må de blandede partiellderiverte være like.

(a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

(b) $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$

(c) $\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$

(d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

(e) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$

(f) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$

(g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

(h) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$

(i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

Potensialfunksjon

Teorem 17.4
La $D \subseteq \mathbb{R}^3$ være enkeltsammenhengende og $\mathbf{F}$ et glatt vektorfelt på D slik at

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Da er $\mathbf{F}$ konservativt: det finnes et skalarfelt ϕ på D slik at

$$\mathbf{F} = \nabla \phi.$$

Vektorpotensial

Teorem 17.5
La $D \subseteq \mathbb{R}^3$ være et område slik at enhver lukket flate i D avgrenser et område inneholdt i D, og la $\mathbf{F}$ være et glatt vektorfelt på D slik at

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0.$$

Da har $\mathbf{F}$ et vektorpotensial: det finnes et vektorfelt $\mathbf{G}$ på D slik at

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}.$$

Eksempel

Er vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x, 0)$$

konservativt?

Eksempel

Finn et vektorpotensial for

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-2z, 2x, 2xy)$$

på $\mathbb{R}^3$.

Greens teorem

Teorem 17.6
La $R \subseteq \mathbb{R}^2$ være et regulært område med rand $C = \partial R$. Anta at C er positivt orientert og består av et endelig antall glatte, enkle, lukkede kurver. Hvis $\mathbf{F} = (P, Q)$ er et glatt vektorfelt på R har vi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Eksempel

La $R \subseteq \mathbb{R}^2$ være området avgrenset av kurvene $x^2 + y^2 = 1$ og $x + y = 1$. La $C = \partial R$, positivt orientert. Bruk Greens teorem til å regne ut

$$\oint_C (2x + 2y)\,dx + (6xy + 2x - \cos y)\,dy.$$

Divergensteoremet i $\mathbb{R}^2$

Teorem 17.7

La $R \subseteq \mathbb{R}^2$ være et regulært område med rand $C = \partial R$. Anta at C er positivt orientert og består av et endelig antall glatte, enkle, lukkede kurver. Hvis $\mathbf{F} = (P, Q)$ er et glatt vektorfelt på R har vi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA,$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til C som peker ut av R.

Bevis

Bruk Greens teorem på vektorfeltet $(-Q, P)$. $\square$