



NTNU

Norwegian University of
Science and Technology

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 9
Vektorfelt og linjeintegraler

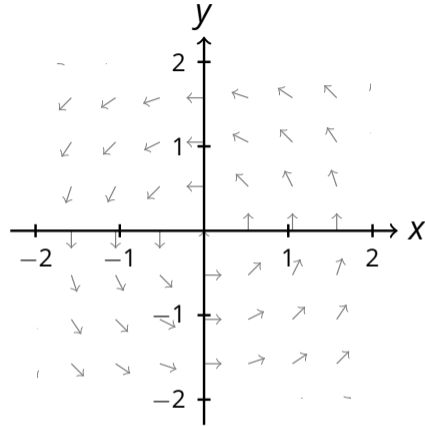
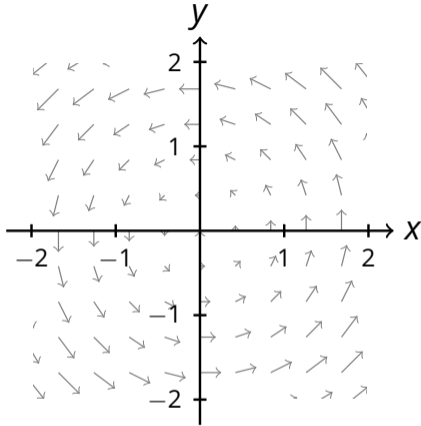
Sigrid Grepstad
Institutt for matematiske fag, NTNU

8./9. Mars 2022

Nøkkelbegreper

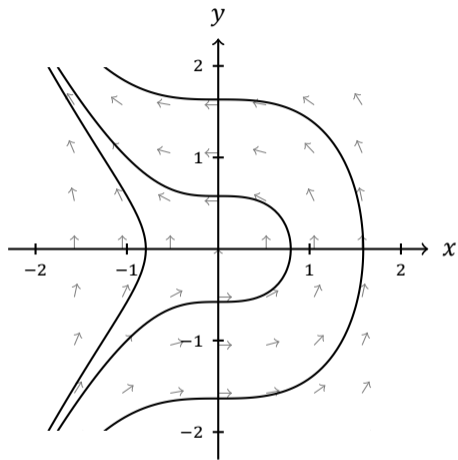
- ▶ Vektorfelt
- ▶ Konservative vektorfelt
- ▶ Linjeintegraler for funksjoner (skalarfelt)
- ▶ Linjeintegraler for vektorfelt

Vektorfelt



$$\mathbf{F}(x,y) = (-y, x)$$

Strømningslinjer



$$\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

Konservative vektorfelt

Et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

definert på et område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ er konservativt hvis det finnes en potensialfunksjon $\varphi(x, y, z)$ slik at

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z)$$

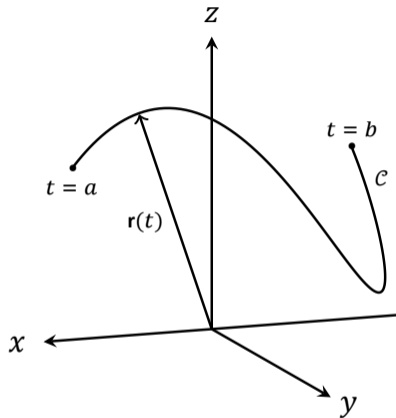
for alle punkter $(x, y, z) \in D$.

Hvis vektorfeltet \mathbf{F} er konservativt må det oppfylle

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z)$$

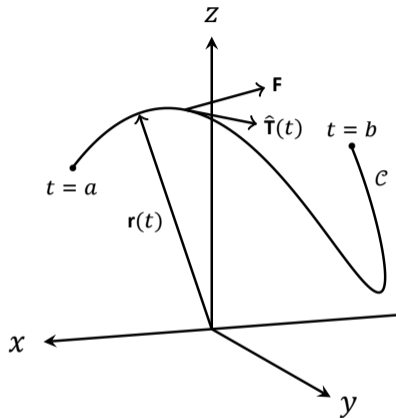
for alle $(x, y, z) \in D$.

Linjeintegral for funksjoner (skalarfelt)



$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Linjeintegral for vektorfelt



$$\int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Linjeintegral i konservativt vektorfelt

La D være en åpen, sammenhengende delmengde av \mathbb{R}^n , og la \mathbf{F} være et glatt vektorfelt i D . Da er følgende utsagn ekvivalente:

1. \mathbf{F} er konservativt i D .

2. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ for alle stykkevis glatte, lukkede kurver C i D .

3. Linjeintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ er uavhengig av veien mellom start- og slutt punktet.

Figurer

- ▶ earth.nullschool.net