



NTNU

Norwegian University of
Science and Technology

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 8
Multiple integraler III

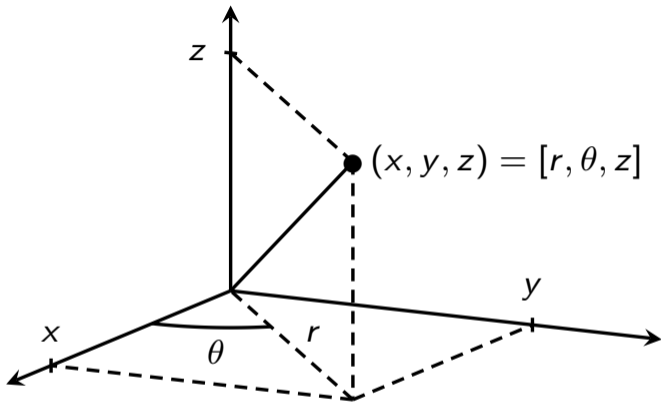
Sigrid Grepstad
Institutt for matematiske fag, NTNU

28. Februar/1. Mars 2022

Nøkkelbegreper

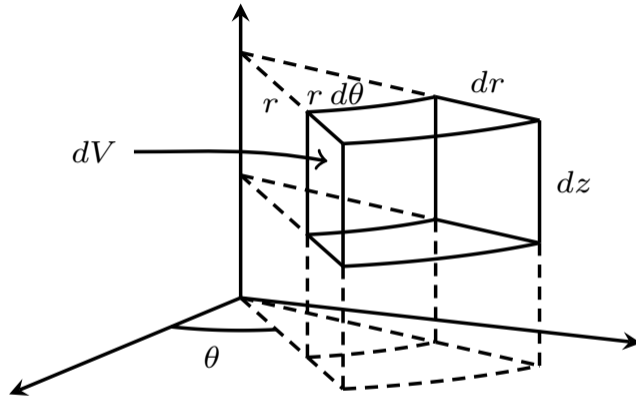
- ▶ Variabelskifte for trippelintegraler
 - ▶ sylinderkoordinater og kulekoordinater
 - ▶ gjennom alminnelige transformasjoner (Jacobi-matrise, Jacobi-determinant)
- ▶ Massesenter

Sylinderkoordinater



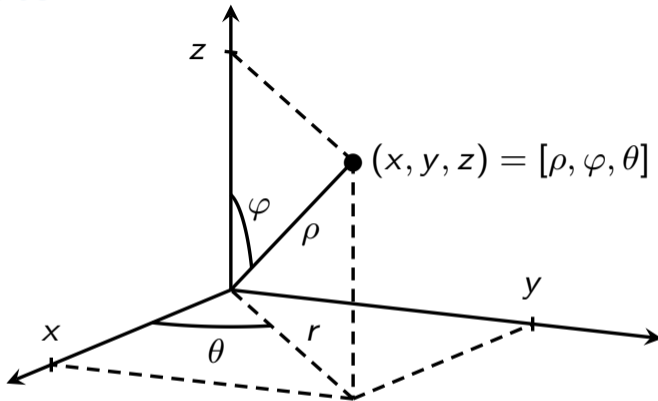
$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

Volumelement iylinderkoordinater



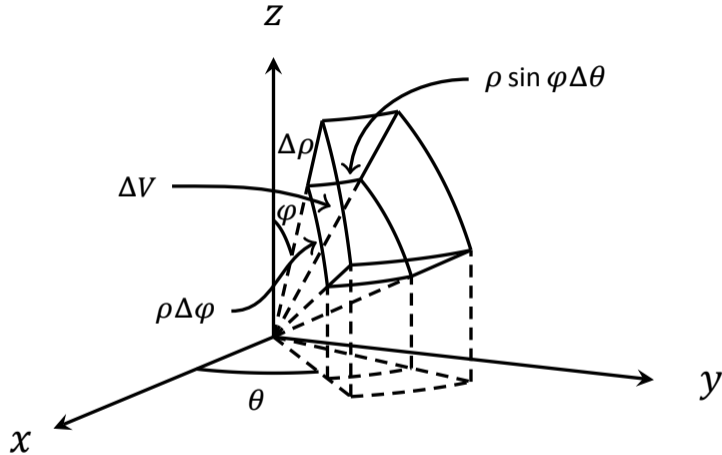
$$dV = r dz dr d\theta$$

Kulekoordinater



$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad z = \rho \cos \varphi$$

Volumelement i kulekoordinater



$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

Variabelbytte i trippelintegral

La T være en én-entydig transformasjon fra et område S i uvw -rommet til et område D i xyz -rommet, gitt ved

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

Anta at $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ og $z(u, v, w)$ og deres 1. ordens partiellderiverte er kontinuerlige på S . Hvis $f(x, y, z)$ er integrerbar på D , og

$$g(u, v, w) = (f \circ T)(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

så er

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S g(u, v, w) |J(u, v, w)| du dv dw,$$

der Jacobi-determinanten er

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Masse og massesenter

Massen av et romlig legeme T med **massetetthetsfunksjon** $\delta = \delta(x, y, z)$ er gitt ved

$$m = \iiint_T dm = \iiint_T \delta(x, y, z) dV, \quad dm = \delta dV.$$

Massesenteret til T er punktet $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ i \mathbb{R}^3 , hvor

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x dm, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_T y dm, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_T z dm.$$

Dersom $\delta(x, y, z) = 1$, så kalles punktet $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ **sentroiden** til T .

Figurer i math3d.org

- ▶ Eksempel sylinderkoordinater: <https://www.math3d.org/BQSUJbs8o>
- ▶ Flater gitt i sylinderkoordinater: <https://www.math3d.org/alrHPPKhJ>
- ▶ Kulekoordinater: <https://www.math3d.org/81U2oTXaa>
- ▶ Flater gitt i kulekoordinater: <https://www.math3d.org/chlkqiXB6>