



NTNU

Norwegian University of
Science and Technology

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 7
Multiple integraler II

Sigrid Grepstad
Institutt for matematiske fag, NTNU

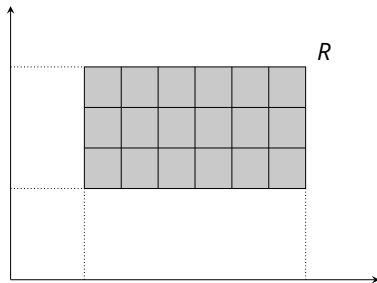
21./22. Februar 2022

Nøkkelbegreper

- ▶ Variabelskifte for dobbeltintegraler
 - ▶ Dobbeltintegraler i polarkoordinater
 - ▶ Jacobi-determinanten
- ▶ Trippelintegraler

Forrige uke: Riemann-summer for dobbeltintegraler

For en partisjon P av rektangelet $R = [a, b] \times [c, d]$ er $\Delta A_{ij} = \text{areal}(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$.

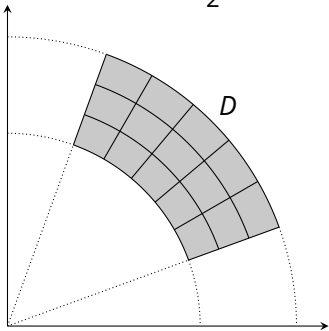


$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Nå: Riemann-summer for polarkoordinater

For en av partisjon P av $D = [\varrho_1, \varrho_2] \times [\alpha, \beta]$ i polarkoordinater er

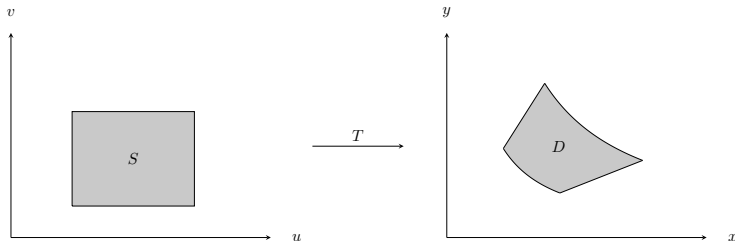
$$\Delta A_{ij} = \text{areal}(D_{ij}) = \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \Delta r_i \Delta \theta_j.$$



$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_{ij}^* \cos \theta_{ij}^*, r_{ij}^* \sin \theta_{ij}^*) \Delta A_{ij} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Variabelskifte for dobbeltintegraler

La $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ være en én-entydig koordinattransformasjon fra et område S i uv -planet til et område D i xy -planet.



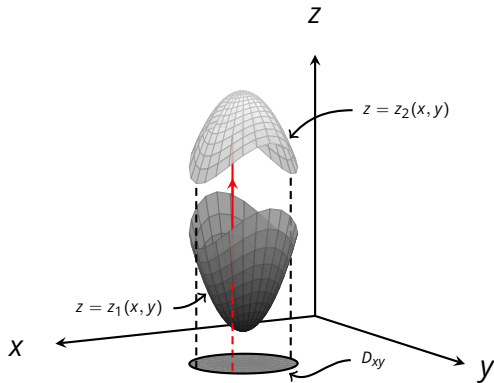
Anta at $x(u, v)$ og $y(u, v)$ og deres første ordens partiellderiverte med hensyn på u og v er kontinuerlige på S . Hvis $f(x, y)$ er integrerbar på D og

$$g(u, v) = (f \circ T)(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

så er g integrerbar på S og

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_S g(u, v) |J(u, v)| \, du \, dv \quad \text{der} \quad J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Trippelintegraler



$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xy}} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Figurer i math3d.org

- ▶ Eksempel: Volum avgrenset av $z = x^2 + 2y^2$ og $z = 12 - 2x^2 - y^2$:
<https://www.math3d.org/CDvbgA7v7>
- ▶ Eksempel: Volum avgrenset av $z = 0$, $y = x^2$ og $y + z = 1$.:
<https://www.math3d.org/wVggtINuz>
- ▶ Eksempel: Bytte av integrasjonsgrenser:
<https://www.math3d.org/p4rzCagBf>