



NTNU

Norwegian University of
Science and Technology

TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 6
Multiple integraler I

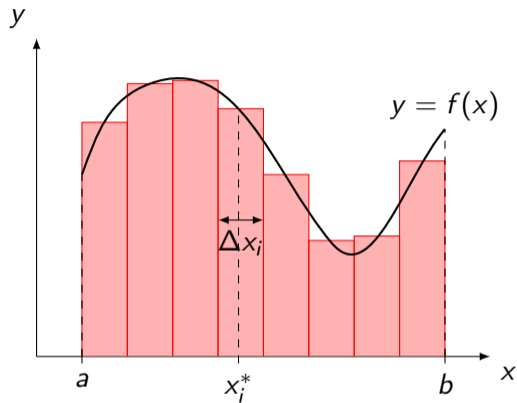
Sigrid Grepstad
Institutt for matematiske fag, NTNU

14./15. Februar 2022

Nøkkelbegreper

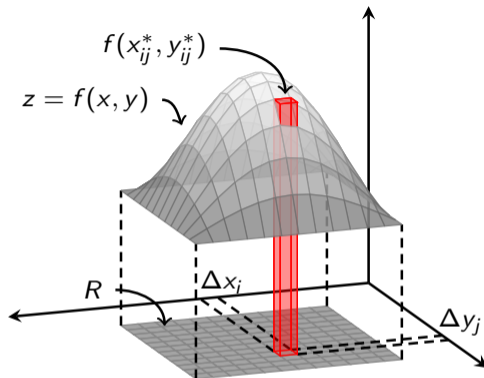
- ▶ Dobbeltintegraler
 - ▶ Riemann-summer
 - ▶ Egenskaper til dobbeltintegraler
- ▶ x -enkle og y -enkle integrasjonsområder
- ▶ Itererte integraler
- ▶ Bytte av integrasjonsrekkefølge
- ▶ Uegentlige integraler for funksjoner med konstant fortegn
- ▶ Middelveier for funksjoner av flere variable

Bestemte integraler



$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P)$$

Dobbeltintegraler



$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$$

Egenskaper til dobbeltintegraler

La $D \subset \mathbb{R}^2$ være en lukket og begrenset mengde.

1. $\iint_D dA = \text{areal}(D)$
2. Hvis $\text{areal}(D) = 0$, så er $\iint_D f(x, y) dA = 0$.
3. Hvis $f(x, y) \geq 0$ og integrerbar på D , så er

$$\iint_D f(x, y) dA = V,$$

der V er volumet til legemet som ligger under grafen $z = f(x, y)$ og over D .

4. Hvis D_1, D_2, \dots, D_k er ikke-overlappende mengder og f er integrerbar på hver av dem, så er f integrerbar på unionen $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$, og

$$\iint_D f(x, y) dA = \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} f(x, y) dA.$$

Middelverdisetningen

I én variabel: Dersom f er kontinuertlig på $[a, b]$ så finnes det et tall c , $a < c < b$, slik at

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Teorem 15.3

Dersom f er kontinuertlig på en lukket, begrenset og *sammenhengende* mengde $D \subset \mathbb{R}^2$, så finnes det et punkt (x_0, y_0) i D slik at

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{areal}(D)} \iint_D f(x, y) dA.$$

Figurer i math3d.org

- ▶ Eksempel: $f(x, y) = x^2y$ på området $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x$:
<https://www.math3d.org/9NT58y8AH>
- ▶ Eksempel: $f(x, y) = \cos(x^{3/2})$ på området $0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4$:
<https://www.math3d.org/oew1M4Uzk>
- ▶ Eksempel: Plate med tykkelse $1 + xy$ på $0 \leq x, y \leq 1$:
<https://www.math3d.org/1Fz1rkM5T>