Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 9, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

24. februar 2020

$\boxed{14.6.1}$

Det er lurt med en skisse, og dette kan gjøres i planet: bytt ut y-aksen med z og x-aksen med r der vi bruker sylinderkoordinater. Vi må bare huske på at $r \geq 0$. La oss først finne hvor kjeglen $z = r$ skjærer sfæren $r^2 + z^2 = a^2$. Vi finner at dette er når $2r^2 = a^2$ eller $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Det følger at volumet vi ønsker er gitt ved

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \int_r^{\sqrt{a^2-r^2}} dz\ r\ dr\ d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r(\sqrt{a^2 - r^2} - r)\ dr = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{2})\pi a^3. \tag{1}$$

$\boxed{14.6.15}$

Vi bruker sylinderkoordinater og finner at R er gitt ved $r^2 \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}$. Vi finner der flatene skjærer hverandre (verdien til r der vi har skjæring). Vi finner da at $r^4 = 2 - r^2$. Det vil si $r^4 + r^2 - 2 = 0$. Det vil si $(r^2 + 1/2)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$ eller (husk at $r \geq 0$) $r = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 1$. Dermed blir integralet vi er på jakt etter gitt ved

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z\ dz\ r\ dr\ d\theta \\ &= \pi \int_0^1 r\left(2 - r^2 - r^4\right)\ dr \\ &= \frac{7\pi}{12}. \end{aligned} \tag{2}$$

$\boxed{14.7.18}$

Massesenteret er gitt ved (merk at $\mathbf{x}_{cm}$ og $\mathbf{x}$ er *vektorer* henholdsvis gitt ved (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) og (x, y, z) nedenfor)

$$\mathbf{x}_{cm} = \frac{1}{M} \iiint_{\text{kube}} \mathbf{x}\rho\ dV \tag{3}$$

der $M = \iiint_{\text{kube}} \rho\ dV$. Merk at symmetri gir at $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm}$ så det holder å regne ut en av disse. Vi finner

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a x^2 + y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^a \int_0^a \frac{a^3}{3} + y^2 a + z^2 a \, dy \, dz \\
&= \cdots = a^5 \qquad (4) \\
x_{cm} &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a x(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \\
&= \int_0^a \int_0^a \frac{a^4}{4} + y^2 \frac{a^2}{2} + z^2 \frac{a^2}{2} \, dy \, dz \\
&= \frac{a^6}{4} + a^3 \int_0^a y^2 \, dy \\
&= \frac{a^6}{4} + \frac{a^6}{3} \\
&= \frac{7}{12} a^6. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Dermed:

$$
\mathbf{x}_{cm} = \frac{7a}{12} (1, 1, 1) \,. \qquad (6)
$$

Kjente formler enda en gang

For volumet av sylinder med høyde h og radius r finner vi foreksempel med sylinderkoordinater (det er vel naturlig!)

$$
V_{\text{sylinder}} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^h dz \, \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi h \int_0^r \rho \, d\rho = \pi h r^2. \qquad (7)
$$

For volum av kule finner vi foreksempel med kulekoordinater (det er vel naturlig!):

$$
\mathrm{V}_{\text{kule}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{\pi R^3}{4}. \qquad (8)
$$

For volum av en kjegle med radius r og høyde h: vi kan foreksempel bruke sylinderkoordinater. Skriv $z = a\rho$ der vi velger a slik at når $z = h$ så er $\rho = r$. Det gir at $a = \frac{h}{r}$. Altså er kjeglen vår gitt ved $z = \frac{r}{h}\rho$ og vi finner dermed volumet:

$$
V_{\text{kjegle}} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_{(h/r)\rho}^h dz \, \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_0^r h\rho - \frac{h}{r}\rho^2 \, d\rho = 2\pi \left(\frac{hr^2}{2} - \frac{h}{r}\frac{r^3}{3} \right) = \frac{\pi r^2 h}{3}. \qquad (9)
$$

Sammenlikning med uke 8:

- Sylinderen: egentlig det samme.
- Kula: lettere nå.
- Kjeglen: mer rett-frem nå (slipper å involvere en sylinder).