Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 7, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

10. februar 2020

$\boxed{14.1.13}$

Dette er med en gang arealet til rektangelet som er $4 \cdot 5 = 20$.

$\boxed{14.1.17}$

Siden y^3 og x er begge odde funksjoner bidrar ikke disse til integralet over enhetsdisken $x^2 + y^2 \leq 1$. Derfor ender vi opp med $\iint_{\mathbb{D}} 5 \; dA$ der $\mathbb{D}$ er enhetsdisken. Dette er 5 ganger arealet til $\mathbb{D}$ som blir 5π.

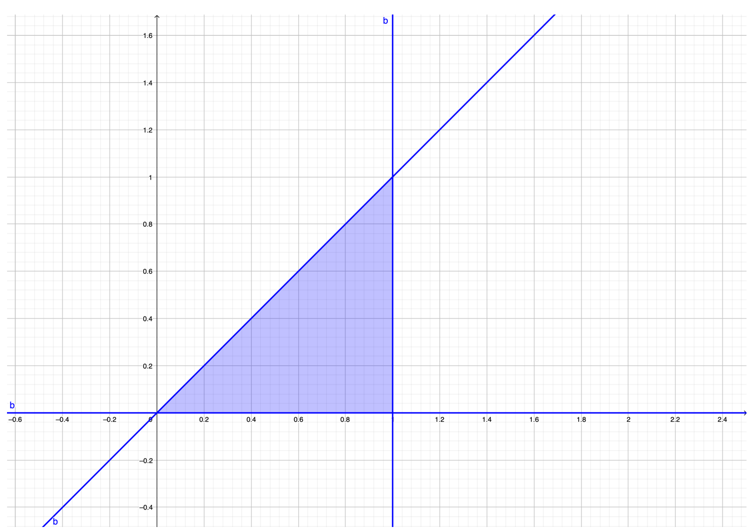
$\boxed{14.2.1}$

Dette er en direkte utregning. Vi finner:

$$\int_0^1 \int_0^x (xy + y^2) \; dy \; dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \; dx = \frac{5}{6} \int_0^1 x^3 \; dx = \frac{5}{24}. \tag{1}$$

$\boxed{14.2.15}$

Integrasjonsområdet er gitt i figuren under, og integralet kan finnes ved å bytte integrasjonsgrenser. Det gir (ved foreksempel hjelp av figuren):



$$\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} \; dx \; dy = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} \; dy \; dx = \int_0^1 x e^{-x^2} \; dx = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-1}\right). \tag{2}$$

$\boxed{14.3.22}$

La rektangelet være R og arealet $A(R) = (b-a)(d-c)$. Gjennomsnittverdien til $f(x,y) = x^2$ over R er

$$\begin{aligned}\bar{f}|_R &= \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)\, dA(x,y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d x^2\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b x^2(d-c)\, dx = \frac{1}{3(b-a)}(b^3 - a^3). \end{aligned} \tag{3}$$

Merk at vi kan skrive $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$ og derfor ender vi opp med

$$\bar{f}|_R = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}. \tag{4}$$

$\boxed{14.3.29}$

Merk at $hk = A(R_{h,k})$ er arealet av rektangelet $R_{h,k}$. Altså er det vi vil vise:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{A(R_{h,k})} \iint_{R_{h,k}} f(x,y) = f(a,b). \tag{5}$$

Siden $f(a,b)$ er konstant, merk at vi har $f(a,b) = \frac{1}{A(R_{h,k})} \iint_{R_{h,k}} f(a,b)$. Altså er det vi vil vise:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{A(R_{h,k})} \iint_{R_{h,k}} (f(x,y) - f(a,b)) = 0. \tag{6}$$

La $\varepsilon > 0$. Siden f er kontinuerlig i (a,b) følger det at vi kan finne $\delta > 0$ slik at hvis $|(x,y) - (a,b)| < \delta$ så har vi $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$. Merk at for alle $(x,y) \in R_{h,k}$ så har vi at $|(x,y) - (a,b)| \leq \operatorname{diag}(R_{h,k}) = \sqrt{h^2 + k^2}$. Men det betyr at om vi velger $|h|, |k|$ så liten at $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$, så har vi $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$. Spesielt følger det naturligvis at

$$\left| \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{A(R_{h,k})} \iint_{R_{h,k}} f(x,y) - f(a,b) \right| \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon \frac{1}{A(R_{h,k})} \iint_{R_{h,k}} = \varepsilon. \tag{7}$$

Resultatet følger nå ved å merke at dette er sant for alle $\varepsilon > 0$ og derfor også om vi lar $\varepsilon \downarrow 0$.