Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 6, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

3. februar 2020

13.1.7

Vi regner ut og finner

$$\nabla f(x,y) = (\sin y, x\cos y) \tag{1}$$

slik at de kritiske punktene er $(0,\pi\mathbb{Z}) \equiv k(0,\pi), k \in \mathbb{Z}$. For klassifisering bruker vi andrederiverttesten. Vi finner

$$f_{xx}(x,y) = 0 \tag{2}$$
$$f_{xy}(x,y) = \cos y. \tag{3}$$

La $\Delta(x,y) := (f_{xx}f_{yy})(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$. Vi finner dermed

$$\Delta(0,\pi\mathbb{Z}) = -(\cos(\pi\mathbb{Z}))^2 = -1. \tag{4}$$

Altså er alle kritiske punkter sadelpunkter.

13.1.27

De kritiske punktene er gitt der $z_x = z_y = 0$. Vi implisitt deriverer med hensyn på x og finner

$$e^{2zx-x^2}(2z_x x + 2z - 2x) - 3e^{2zy+y^2}(2z_x y) = 0. \tag{5}$$

Hvis $z_x = 0$ gir dette dermed

$$2e^{2zx-x^2}(z-x) = 0 \tag{6}$$

som dermed gir $z = x$. På den andre siden gir derivasjon med hensyn på y:

$$e^{2zx-x^2}(2z_y x) - 3e^{2zy+y^2}(2z_y y + 2z + 2y) = 0. \tag{7}$$

For $z_y = 0$ blir dette da

$$-6e^{2zy+y^2}(z+y) = 0. \tag{8}$$

Dermed $z = -y$. Siden vi også har $z = x$ finner vi dermed at $y = -x$. Altså blir den bestemmende likningen, si uttrykt ved x:

$$e^{2x^2-x^2} - 3e^{-2x^2+x^2} = 2 \tag{9}$$

eller

$$e^{x^2} - 3e^{-x^2} = 2. \tag{10}$$

Vi ganger begge sider med e^{x^2} og ender da opp med

$$e^{2x^2} - 3 = 2e^{x^2}. \tag{11}$$

La $u := e^{x^2}$. Vi finner dermed

$$u^2 - 2u - 3 = (u-3)(u+1) = 0. \tag{12}$$

Dermed $u = 3$ eller $u = -1$. Siden vi åpenbart ikke kan ha $u < 0$ blir likningen $u = 3$ eller $e^{x^2} = 3$. Det vil si $x^2 = \ln(3)$. Det vil si $x = \pm\sqrt{\ln(3)}$. Altså er de kritiske punktene:

$$\left(\pm\sqrt{\ln(3)}, \mp\sqrt{\ln(3)}\right). \tag{13}$$

$\boxed{13.2.1}$

Fremgangsmåten er rutinær: vi finner først kritiske punkter. Deretter sjekker vi langs randen etter andre potensielle kandidater. Vi vet at funksjonen tar absolutt maks og min siden den er kontinuerlig og vi forbeholder oss til et lukket og begrenset område; dette er ekstremalverdisetningen. Vi finner

$$\nabla f(x,y) = (1-2x, 2y) \tag{14}$$

slik at det eneste kritiske punktet er $(1/2, 0)$. Randen er gitt for $x = 0, x = 2$ og $y = 0, y = 1$. For $x = 0$ finner vi

$$f(0,y) = y^2 \tag{15}$$

som har maksverdi for $y = 1$ med verdien 1, og minimum for $y = 0$ med verdien 0. Vi finner dermed sammen med det kritiske punktet fra tidligere:

$$f(1/2, 0) = 1/4 \tag{16}$$
$$f(0,0) = 0 \tag{17}$$
$$f(0,1) = 1 \tag{18}$$

For $x = 2$ finner vi

$$f(2,y) = y^2 - 2 \tag{19}$$

som vi vet har bunnpunkt med verdien -2 for $y = 0$, og som er maksimal (siden det er en voksende funksjon) med verdien $1 - 2 = -1$ for $y = 1$. Altså har vi:

$$f(2,0) = -2 \tag{20}$$
$$f(2,1) = -1 \tag{21}$$

For $y = 0$ finner vi

$$f(x,0) = x - x^2 := g(x) \tag{22}$$

som er en parabel som er konkav. Den har altså et toppunkt, nemlig gitt der $g'(x) = 1 - 2x = 0$ som gir $x = 1/2$. Den har videre sin minste verdi (siden den er avtakende etter topppunktet) i $x = 2$ med verdien $g(2) = -2$. Altså finner vi (men dette hadde vi uansett tidligere):

$$f(1/2, 0) = 1/4 \tag{23}$$
$$f(2,0) = -2 \tag{24}$$

Det gjenstår å ta for oss tilfellet $y = 1$. Det gir

$$f(x, 1) = x - x^2 + 1 := h(x) \tag{25}$$

som igjen er en konkav parabel. Dermed har vi topppunkt i $x = 1/2$ med verdien $h(1/2) = 1/4 + 1 = \frac{5}{4}$, og minste verdi i $x = 2$ med verdien -1. Altså har vi:

$$f(1/2, 1) = \frac{5}{4} \tag{26}$$

$$f(2, 1) = -1. \tag{27}$$

Det følger at maksimumsverdien til f er $5/4$ og minimumsverdien er -2.

13.3.9

La $g(x) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$. Vi bruker Lagranges metode. Utregning gir

$$\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy) \tag{28}$$

$$\nabla g(x, y, z) = 2(x, y, z) \tag{29}$$

Dermed:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \implies (yz, xz, xy) = 2\lambda(x, y, z). \tag{30}$$

Vi kan åpenbart anta at $x, y, z \neq 0$ siden 0 åpenbart ikke er minste eller største verdi til f på $g = 0$. Da kan vi dele slik at vi finner:

$$2\lambda = \frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z}. \tag{31}$$

Vi kan så gange med xyz slik at vi ender opp med

$$y^2 z^2 = x^2 z^2 = x^2 y^2. \tag{32}$$

Herfra følger det at $x^2 = y^2 = z^2$ som gir maksverdi for $x = y = z > 0$ og minimumsverdi for $x = y, z = -x, x > 0$ (for eksempel); det holder at en av dem har forskjellig fortegn fra de to andre (som da velges å ha positivt fortegn). Siden vi skal ligge på $g = 0$ finner vi dermed med $x = y = z$ at $3x^2 = 12$ eller $x^2 = 4$ eller $x = \pm 2$. Altså er maksimumsverdien gitt ved $f_{max} = f(2, 2, 2) = 8$ og minimumsverdien er $f_{min} = -8$. **Til refleksjon:** merk at (en del av) oppgaven også kan tenkes på som å maksimere volumet av en boks innskrevet i en sfære. Da gir det kanskje mening at største volumet er når vi har en kube?