Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 5, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

26. januar 2020

Deriverbarhet impliserer kontinuitet

Per definisjon, har vi at $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-f'(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|} = 0$. Siden $f'(\mathbf{a})$ er linær, følger det at $f'(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = 0$ når $|\mathbf{h}| \to 0$. Men da må resten av telleren også gå mot 0, siden nevneren åpenbart går mot 0. Det betyr at $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = 0$ som betyr at f er kontinuerlig i $\mathbf{a}$.

12.5.3

Kjerneregelen gir

$$z_u = g_u = g_x x_u + g_y y_u = g_x h_u + f_x h_u. \tag{1}$$

12.6.1

Vi skriver $(3.1, 0.9) = (3, 1) + (0.1, -0.1) := (a, b) + (h, k)$ der $(a, b) := (3, 1)$. Bruk av linearisering gir dermed:

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k. \tag{2}$$

Med $f(x, y) = x^2y^3$ finner vi:

$$f(a, b) = 3^2 = 9 \tag{3}$$
$$f_x = 2xy^3 \tag{4}$$
$$f_x(a, b) = 6 \tag{5}$$
$$f_y = 3x^2y^2 \tag{6}$$
$$f_y(a, b) = 27 \tag{7}$$

og dermed:

$$f(3.1, 0.9) \approx 9 + 6(0.1) + 27(-0.1) = 9 + \frac{6}{10} - \frac{27}{10} = \frac{69}{10} = 6.9. \tag{8}$$

Til sammenlikning, så har vi nøyaktig at $f(3.1, 0.9) = (3.1)^2(0.9)^3 = 7.00569$.

12.6.17

Jacobimatrisen blir

$$J_{\mathbf{f}}(r, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}. \tag{9}$$

12.7.17

La v være retningen. Vi skriver $v := (a, b)$ med $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Den retningsderiverte i punktet p til f i retningen v er $D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v$. Siden $\nabla f(x, y) = (y, x)$ finner vi for $p = (2, 0)$ at

$$D_v f(p) = 2b \tag{10}$$

og skal dette være -1 finner vi at $b = -\frac{1}{2}$. Dermed må vi ha $a^2 = 1 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ som gir $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Hvis vi istedenfor -1 skal ha -3 finner vi $2b = -3$ eller $b = -\frac{3}{2}$. Det gir så $a^2 = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$ som er umulig. Altså kan ikke den retningsderiverte være lik -3. Hvis vi skal ha at den retningsderiverte er lik -2 finner vi at $b = -1$. Det gir at $a = 0$. Altså har vi:

- $D_v f(p) = -1$ for $v = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,
- $D_v f(p) = -2$ for $v = (0, -1)$.

12.7.31

Fiks et punkt (a, b) i disken. Det holder å vise at $f(a, b) = f(0, 0)$. La $c(t) := (x(t), y(t))$ være en glatt parametrisert kurve i disken slik at $c(0) = (x(0), y(0)) = (0, 0), c(1) = (x(1), y(1)) = (a, b)$. For eksempel kan vi la $c(t) = t(a, b)$. La $g(t) = f(c(t))$. Ved kjerneregelen følger det at $g'(t) = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)$. Integrasjon og bruk av analysens fundamentalteorem gir dermed $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\ dt = \int_0^1 \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)\ dt = 0$ siden vi per antakelse har at $\nabla f(c(t)) = 0$ for alle $t \in [0, 1]$. Men det betyr at $g(1) = g(0)$. Siden $g(1) = f(c(1)) = f(a, b)$ og $g(0) = f(c(0)) = f(0, 0)$ følger det at $f(a, b) = f(0, 0)$ som ønsket.

Bemerkning: merk at det ikke er noe spesielt med disken. Det samme argumentet hadde gitt samme konklusjon (at f er konstant) så lenge området er slik at alle to punkter kan forbindes ved hjelp av en (stykkevis) glatt kurve.

12.8.1

Vi deriverer den oppgitte likningen med hensyn på y. Det gir

$$\frac{\partial x}{\partial y} y^3 + 3xy^2 + 4x^3 \frac{\partial x}{\partial y} y + x^4 = 0. \tag{11}$$

Dermed:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{x^4 + 3xy^2}{y^3 + 4x^3 y} \tag{12}$$

der dette holder så lenge nevneren ikke er 0.

12.8.16

Første steg er å sette opp Jacobimatrisen

$$J_{\mathbf{f}}(R, \phi, \theta) = \begin{bmatrix} x_R & x_\phi & x_\theta \\ y_R & y_\phi & y_\theta \\ z_R & z_\phi & z_\theta. \end{bmatrix} \tag{13}$$

Deretter må determinanten regnes ut. Matrisen blir:

$$J_{\mathbf{f}}(R,\phi,\theta) = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & R\cos\phi\cos\theta & -R\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & R\cos\phi\sin\theta & R\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -R\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

og determinanten blir

$$\begin{aligned} |J_{\mathbf{f}}(R,\phi,\theta)| &= \sin\phi\cos\theta(R^2\sin^2\phi\cos\theta) - R\cos\phi\cos\theta(-R\sin\phi\cos\phi\cos\theta) \\ &\quad - R\sin\phi\sin\theta(-R\sin^2\phi\sin\theta - R\cos^2\phi\sin\theta) \\ &= R^2\sin^3\phi\cos^2\theta + R^2\sin\phi\cos^2\phi\cos^2\theta + R^2\sin^3\phi\sin^2\theta + R^2\cos^2\phi\sin\phi\sin^2\theta \\ &= R^2\sin^3\phi + R^2\sin\phi\cos^2\phi \\ &= R^2\sin\phi. \end{aligned} \tag{15}$$