Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 11, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

9. mars 2020

$\boxed{15.5.2}$

I sfæriske koordinater har vi:

$$x = a \sin\phi \cos\theta \tag{1}$$
$$y = a \sin\phi \sin\theta \tag{2}$$
$$z = a \cos\phi \tag{3}$$

slik at parametrisering for sfæren blir

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \tag{4}$$

med partielle deriverte

$$\mathbf{r}_\phi = (a\cos\phi\cos\theta, a\cos\phi\sin\theta, -a\sin\phi) \tag{5}$$
$$\mathbf{r}_\theta = (-a\sin\phi\sin\theta, a\sin\phi\cos\theta, 0) \tag{6}$$

som gir kryssproduktet:

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{bmatrix} = \left(a^2\sin^2\phi\cos\theta, a^2\sin^2\phi\sin\theta, a^2\cos\phi\sin\phi\right) \tag{7}$$

som har lengde

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| &= a^2\sqrt{\sin^4\phi + \cos^2\phi\sin^2\phi} \\ &= a^2\sin\phi \end{aligned} \tag{8}$$

siden $\phi \in [0, \pi]$ (ellers måtte vi generelt hatt absoluttverdi av $\sin\phi$). Dermed følger det at flatelementet er $dS = a^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta$.

$\boxed{15.5.7}$

Vi bruker x, y som parametre og skriver $z = x^2/2$. Projeksjonen av flaten vår i xy-planet er kvartdisken $x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$. Med $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y) = (x, y, x^2/2)$ som parametrisering finner vi dermed:

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, x) \tag{9}$$

$$\mathbf{r}_y = (0, 1, 0) \tag{10}$$

slik at

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-x, 0, 1) \tag{11}$$

sånn at lengden av dette er $\sqrt{x^2+1}$. Dermed må vi regne ut:

$$\begin{aligned} \iint_S x\sqrt{x^2+1}\, dS &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\sqrt{x^2+1}\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{x^2+1}^3 |_0^{\sqrt{1-y^2}}\, dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\sqrt{2-y^2}^3 - 1 \right) dy \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned} \tag{12}$$

$\boxed{15.5.13}$

Kjeglen skjærer planet i $1 + y = \sqrt{2(x^2+y^2)}$ eller $(1+y)^2 = 2(x^2+y^2)$. Det vil si:

$$1 = 2(x^2+y^2) - y^2 - 2y = 2x^2 + y^2 - 2y \tag{13}$$

som ved fullføring av kvadrat i y gir:

$$2 = 2x^2 + (y-1)^2 \tag{14}$$

Dermed:

$$1 = x^2 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{2}} \right)^2. \tag{15}$$

Dette er en ellipse i x og y. Vi vil ikke bare ha ellipsen men innsiden også. Vi kan parametrisere ved bruk av parametre (r, θ) tilsvarende polarkoordinater:

$$x(r,\theta) = r\cos(\theta) \tag{16}$$
$$y(r,\theta) = 1 + \sqrt{2}r\sin(\theta) \tag{17}$$

med $\theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]$. med $z = 1 + y$ finner vi dermed $z(r, \theta) = 2 + \sqrt{2}r\sin\theta$. Dermed får vi parametrisering for $\mathcal{S}$ gitt ved:

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, 1 + \sqrt{2}r\sin\theta, 2 + \sqrt{2}r\sin\theta). \tag{18}$$

Dermed:

$$\mathbf{r}_r = (\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\sin\theta) \tag{19}$$
$$\mathbf{r}_\theta = (-r\sin\theta, \sqrt{2}r\cos\theta, \sqrt{2}r\cos\theta). \tag{20}$$

Dermed:

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sqrt{2}\sin\theta & \sqrt{2}\sin\theta \\ -r\sin\theta & \sqrt{2}r\cos\theta & \sqrt{2}r\cos\theta \end{bmatrix} = \left(0, -\sqrt{2}r, \sqrt{2}r\right). \tag{21}$$

Dermed:

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = 2r, \tag{22}$$

og dermed tilslutt:

$$\iint_{\mathcal{S}} y\, dS = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + \sqrt{2}r\sin\theta)r\, dr\, d\theta = 2\pi. \tag{23}$$

15.5.15

Randen til projeksjonen av skjæringsflaten finner vi for $x^2 = 1 - 3x^2 - y^2$ (når de to z uttrykkene er like hverandre). Dette gir $4x^2 + y^2 = 1$ som er en ellipse. I første oktant får vi kun kvarte ellipsen med $x, y \geq 0$. Kall denne E. Vi bruker x, y som parametre og finner en parametrisering for $\mathcal{S}$ gitt ved:

$$\mathbf{r}(x,y) = (x, y, x^2), \quad (x,y) \in E. \tag{24}$$

Dermed:

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, 2x) \tag{25}$$
$$\mathbf{r}_y = (0, 1, 0) \tag{26}$$

som gir

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-2x, 0, 1) \tag{27}$$

slik at lengden av denne er $\sqrt{4x^2+1}$. Vi finner derfor:

$$\begin{aligned} \iint_S xz \, dS &= \iint_E x^3 \sqrt{4x^2+1} \, dydx \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{4x^2+1}\sqrt{1-4x^2} \, dx \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1-16x^4} \, dx \\ &= \frac{1}{96} \end{aligned} \tag{28}$$

$\boxed{15.6.1}$

Vi sparer oss litt tid hvis vi merker oss at vi kun får bidrag fra fluks gjennom planet $y = 0$ og Π gitt ved $x+2y+3z = 6$: det er ikke noe bidrag gjennom $z = 0$ siden $\mathbf{F}$ ikke har noe z-komponent, og det er ikke noe bidrag gjennom $x = 0$ fordi $\mathbf{F} \cdot (-1, 0, 0) = -x = 0$ når $x = 0$. Når $y = 0$ finner vi fra Π at $x + 3z = 6$. Videre finner vi at $\mathbf{F} \cdot (0, -1, 0) = -z$. Fluksbidraget gjennom $y = 0$ er derfor gitt ved:

$$\Phi_{y=0} = \iint_{x+3z\leq 6, x,z\geq 0} (-z) \, dA = -\int_0^2 z(6-3z) \, dz = -4. \tag{29}$$

Det gjenstår å finne fluksen gjennom Π. Det kan vi gjøre på følgende måte. Vi parametriserer Π ved bruk av x, y som gir oss:

$$\mathbf{r}(x, y) = \left(x, y, \frac{6-x-2y}{3} \right) \tag{30}$$

der $(x, y) \in D$ og D er gitt som projeksjonen av Π ned i xy-planet. Dermed:

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right) \tag{31}$$

og siden denne har positiv z-komponent har vi funnet riktig normalvektor. Dermed blir fluksbidraget:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Pi} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)\; dA \\
&= \iint_{x+2y \leq 6, x, y \geq 0} \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3} z(x,y) \right)\; dx\; dy \\
&= \int_0^3 \int_0^{6-2y} \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{6-x-2y}{3} \right)\; dx\; dy \\
&= 10.
\end{aligned} \tag{32}$$

Totalfluks er derfor $\Phi = \Phi_{y=0} + \Phi_{\Pi} = 10 - 4 = 6$.