TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 14

Våren 2022

Læringsoppgaver

$\boxed{1}$ La $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{\sin z}, x, xe^{\sin z}\cos z)$, og la C være skjæringskurven mellom planet $2x+2y+z = 2$ og den elliptiske sylinderflaten $(x-1)^2 + (y/2)^2 = 1$. Regn ut

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når C er orientert mot klokken sett ovenfra.

$\boxed{2}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene $z = x^2+(y+1)^2$ og $z = 10-x^2-(y-1)^2$, og la C betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, x^2 + y^2)$.

a) Regn ut

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der ∂T er randen til T og enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ peker ut fra T.

b) Regn ut

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er orientert mot klokken sett ovenfra.

$\boxed{\text{U}}$ Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right).$$

a) Regn ut $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der C er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, orientert mot klokken sett ovenfra.

b) Regn ut curl $\mathbf{F}$, og drøft resultatet og resultatet i a) i lys av Stokes' teorem.

STACK-oppgaver

$\boxed{1}$ La C være skjæringskurven mellom sylinderen $4x^2+y^2 = 3$ og grafen til en glatt funksjon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, det vil si, flaten $z = f(x, y)$. Kurven er orientert mot klokken sett ovenfra. Regn ut integralet

$$\oint_C -y^3\, dx + 4x^3\, dy - 3z^2\, dz.$$

$\boxed{2}$ Temperaturen i et rom er gitt ved funksjonen

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2}(4x^2 + 3y^2 + 4z^2).$$

Ved tiden $t = 0$ flyr en flue gjennom punktet $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, 2)$ langs skjæringskurven mellom de to flatene $z = x^2 - \frac{1}{2}y^2$ og $z^2 = x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

Hvor stor temperaturendring, $\frac{dT}{dt}$, opplever fluen ved $t = 0$ dersom dens vertikale hastighet ved dette tidspunktet er 2?