

Interaktiv forelesning uke 12

Våren 2022

Læringsoppgaver

- 1 Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, -3y, 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ikke har et vektorpotensial, altså at det ikke finnes noe vektorfelt \mathbf{G} slik at

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \text{curl } \mathbf{G}(x, y, z)$$

for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- 2 La R være området i \mathbb{R}^2 som tilfredsstiller ulikhetene $x^2 + y^2 \leq \pi^2$ og $y \geq 0$.

- a) Regn ut

$$\iint_R (4 - x) dx dy.$$

- b) La $C = \partial R$ være randen til R orientert mot klokken, og la C' være den krumme delen av C . Regn ut

$$\int_{C'} \left(xy + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx + \left(4x + e^{y^2} + 3 \arctan y \right) dy.$$

- U La S_r være kuleflaten med sentrum i origo og radius r , og la vektorfeltet \mathbf{F} være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$. La $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalen til S_r som peker utover. La $V(r)$ være volumet innenfor S_r , og definer funksjonen $f(r)$ ved

$$f(r) = \iint_{S_r} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Finn et uttrykk for $f(r)$, og bestem grenseverdien

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(r)}{V(r)}.$$

Sammenlign denne grenseverdien med en fysisk fortolkning av divergensen til \mathbf{F} .

STACK-oppgaver

- 1 La C være randen til den delen av disken med sentrum i origo og radius 1 som ligger i første kvadrant, orientert mot klokken. Bruk Greens teorem til å regne ut integralet

$$\oint_C (2y^2 - 4x\sqrt{x^2 + y^2}) dx + (4xy + 2y\sqrt{x^2 + y^2}) dy.$$

- 2 La $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$, og la C være randen til D orientert mot klokken. Regn ut integralet

$$\oint_C (\sin(x^2) + y^2) dx + (\cos(y^2) + 3xy) dy$$

ved å bruke Greens teorem.