TMA4105 Matematikk 2

# Skriftlig innlevering 4

Våren 2022

**Innleveringsfrist: 22. april 2022, kl. 16.00.**

$\boxed{1}$ La vektorfeltet $\mathbf{F}$ være definert ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = e^{x+y+z}(-x, y, x-y).$$

**a)** Vis at $\mathbf{F}$ er divergensfritt.

**b)** Finn to vektorpotensialer for $\mathbf{F}$; det vil si, vektorfelter $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ som er slik at curl $\mathbf{G}$ = curl $\mathbf{H} = \mathbf{F}$. Disse skal være ulike, i den forstand at $\mathbf{G} - \mathbf{H}$ *ikke* er konstant.

$\boxed{2}$ La $D$ være det lukkede området i $\mathbb{R}^2$ begrenset av $x$-aksen og kurven beskrevet av likningen $y = 1 - x^2$. Vi skriver $\mathcal{C} = \partial D$ for randen til $D$.

Benytt Greens teorem til å beregne linjeintegralet

$$\oint_{\mathcal{C}} (\sin(x) + y^2)\, dx + \big(\cos(x) - xy\big)\, dy,$$

når $\mathcal{C}$ er orientert i positiv omløpsretning.

(Hint: I integralet du ender opp med til slutt kan det være lurt å bruke symmetri.)

$\boxed{3}$ La $S$ være den delen av paraboloiden $z = 3 - x^2 - y^2$ der $z \geq 2$, og la $T$ være legemet begrenset av $S$ og planet $z = 2$.

**a)** Bestem volumet til $T$.

Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(-x^2y, xy^2, 2z\big)$.

**b)** Finn verdien til flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $S$ med positiv $\mathbf{k}$-komponent. Dette kan tolkes som fluksen til $\mathbf{F}$ opp gjennom flaten $S$.

(Hint: Legg merke til at $S$ *ikke* er en lukket flate.)

$\boxed{4}$ La vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, 3x-y, z^2+xy),$$

og la $\mathcal{C}$ være skjæringskurven mellom flaten $z = \sqrt{x^2+y^2+1}$ og planet $z = \sqrt{5}$. Vi orienterer $\mathcal{C}$ mot klokken sett ovenfra.

Regn ut linjeintegralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(Altså sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ rundt $\mathcal{C}$.)