Anbefalte oppgaver uke 8

Våren 2022

De fleste av oppgavene er hentet fra læreboken Calculus 2, 10. utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning

1 For hvilke verdier av k konvergerer integralet nedenfor? Hvis det konvergerer, regn det også ut.

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^k}\, dA.$$

2 La R være området avgrenset av $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ og $x + y = 4$. Beregn

$$\iint_R \frac{1}{x+y}\, dx\, dy$$

ved å gjøre variabelskiftet $x = u - uv$, $y = uv$.

3 Regn ut det itererte integralet:

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_0^y \cos y^3\, dx\, dy\, dz.$$

4 La P være parallellogrammet avgrenset av $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ og $y = x + 1$. Evaluer

$$\iint_P xy\, dx\, dy$$

ved å gjøre et passende variabelskifte.

Oppgaver med løsningsforslag

1 Beregn dobbeltintegralet:

$$\iint_Q y\, dA$$

der Q er kvartdisken gitt ved $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x^2 + y^2 \leq a^2$.

2 Definer gjennomsnittverdien til en integrerbar funksjon $f = f(x, y, z)$ over et område R i rommet. Finn så gjennomsnittverdien til $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ over kuben $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Kjente formler Bruk dobbeltintegraler for å utlede de kjente formlene for volumet av:

- en sylinder med høyde h og radius r;
- en kule med radius R;
- en kjegle med høyde h og radius r.

Areal: Bruk polarkoordinater som variabelskifte og transformasjonsformelen for to variabler til å utlede arealformelen for et område innesluttet av en polarkurve $r = f(\theta)$ som du lærte i uke 2. Bruk tilsvarende idé med bruk av variabelskifte til å finne arealet innesluttet av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Eksamen S2010, Oppg. 3: Et dobbeltintegral blir ved iterert integrasjon

$$I = \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{y(1+x^2)}} = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\sqrt{y(1+x^2)}}\, dx \right) dy.$$

a) Skisser området D og beregn integralet I ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.

b) Regn ut integralet I ved å benytte variabelskiftet $(u, v) \mapsto (u, u^2 v) = (x, y)$. Vis først at området D i xy-planet tilsvarer området R i uv-planet bestemt av ulikhetene $0 \le u \le 1$ og $0 \le v \le 1$. Det oppgis at

$$dx\,dy = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| du\,dv.$$

Eksamen V2016, Oppg. 7: La D være området i første kvadrant (det vil si $x \le 0$ og $y \le 0$) som er avgrenset av ellipsene $4x^2 + y^2 = 16$ og $4x^2 + y^2 = 1$. Skisser området D og regn ut

$$\iint_D \frac{x}{4x^2 + y^2}\, dA.$$

Eksamen V2015, Oppg. 8: Området D er avgrenset av kurvene gitt ved $y^2 - x^2 = 1$, $y^2 - x^2 = 4$, $x = -y/2$ og $x = y/2$ for $y > 0$. Finn en variabelsubstitusjon som transformerer D til et rektangel, og bruk denne til å beregne

$$\iint_D \frac{y^2 - x^2}{y^2}\, dA.$$

Hint: Regningen blir kanskje enklere om du uttrykker $du\,dv$ ved $dx\ dy$ enn om du gjør det omvendt.