

Anbefalte oppgaver uke 13

Våren 2022

De fleste av oppgavene er hentet fra læreboken Calculus 2, 10. utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning

1 Finn fluksen til $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2, y^2 - z^2, z)$ gjennom kuleflaten med sentrum i origo og radius 3.

2 Finn fluksen til $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ gjennom overflaten til sylinderen gitt ved

$$x^2 + y^2 \leq 2y, \quad 0 \leq z \leq 4.$$

3 La D være et regulært legeme i \mathbb{R}^3 , og la S være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ normalen som peker utover. Vis at for alle glatte vektorfelt \mathbf{F} så gjelder:

$$\oiint_S \text{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 0.$$

4 Beregn fluksintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS,$$

der vektorfeltet \mathbf{F} er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (5x^2 + ye^y, 3y^2, z),$$

der S er den øvre halvsfæren definert av $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, og enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv \mathbf{k} -komponent.

5 Et legeme R som tilfredsstillers antakelsene i divergensteoremet med har konstant massetetthet, volum V og massesenter i $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Finn fluksen til

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - x - 2y, 2y^2 + 3y - z, z^2 - 4z + xy)$$

ut av overflaten til R uttrykt ved V og $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Oppgaver med løsningsforslag

1 Vis at fluksen til et konstant vektorfelt gjennom en lukket glatt og orientert flate i rommet alltid er 0.

2 Finn fluksen til $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ gjennom sfæren med sentrum i origo og radius $a > 0$.

3 La D være et legeme i \mathbb{R}^3 som tilfredsstillers antakelsene i divergensteoremet og la S være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. Vis at volumet til D er gitt ved

$$V = \frac{1}{3} \oiint_S (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Ekstra spørsmål: kunne vi erstattet integranden med et annet vektorfelt og konstanten $1/3$ med noe annet?

- 4] La D være et legeme i \mathbb{R}^3 som tilfredstiller antakelsene i divergensteoremet og la S være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. La ϕ, ψ være glatte skalarfelt og la $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ betegne den retningsderiverte til ϕ i retningen av $\hat{\mathbf{N}}$. Vis at

$$\iiint_D \Delta \phi \, dV = \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS,$$

der $\Delta \phi = \nabla^2 \phi$ betegner Laplacen til ϕ .

- 5] Samme antakelser som i 4. Vis nå at (dette er en såkalt *Green type formel*):

$$\iiint_D (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) \, dV = \iint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \, dS.$$

- 6] Samme antakelser som i 5. Vis at

$$\iiint_D \nabla \phi \, dV = \iint_S \phi \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

ved å anvende divergensteoremet på $\mathbf{F} = \phi \mathbf{c}$ der \mathbf{c} er et vilkårlig konstant vektorfelt.

Eksamen S2003, Oppg. 6a) og 6b)

Eksamen V1998, Oppg. 5

Eksamen S2000, Oppg. 6