TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 10

Våren 2022

De fleste av oppgavene er hentet fra læreboken Calculus 2, 10. utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Bestem strømningslinjene til vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

$\boxed{2}$ Evaluer linjeintegralet

$$\int_C (x + y)\, ds$$

der C er gitt ved

$$\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} - t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

$\boxed{3}$ Finn massen til vaieren som følger kurven

$$\mathbf{r}(t) = (3t, 3t^2, 2t^3), \quad (0 \leq t \leq 1),$$

hvis massetettheten i $\mathbf{r}(t)$ er $1 + t$ gram per enhetslengde.

$\boxed{4}$ La vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$, og kurven C være gitt ved $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ fra $(0, 0, 0)$ til $(1, 1, 1)$. Beregn linjeintegralet av tangentialkomponenten til $\mathbf{F}$ langs C.

$\boxed{5}$ Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y + 4x^3y^3,\ y^3 + x + 3x^4y^2)$$

er konservativt. Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2e^t \cos t, 2e^t \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{1}$ Skisser vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ i planet og bestem dets feltlinjer.

$\boxed{2}$ Avgjør om vektorfeltet er konservativt, og hvis ja, finn en tilhørende potensialfunksjon:

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}.$$

$\boxed{3}$ Samme som i 2, men med vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy - z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} - (2zx - y^2)\mathbf{k}.$$

$\boxed{4}$ Finn det 3-dimensjonale vektorfeltet med potensial

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}.$$

$\boxed{5}$ Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\mathbf{k}$$

er konservativt og finn en potensialfunksjon til denne. Beskriv ekvipotensialflatene og finn feltlinjene.

$\boxed{6}$ Regn ut $\int_C y\, ds$ der C er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t^2, t, t^2)$, $0 \le t \le m$.

$\boxed{7}$ La C være den delen av skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = a^2$ og planet $z = x$ som ligger i første oktant. Regn ut $\int_C x\, ds$.

$\boxed{8}$ Regn ut de lukkede kurveintegralene

a) $\oint_C x\, dy$,

b) $\oint_C y\, dx$,

langs C gitt som randen av den øvre halvdisken $x^2 + y^2 \le a^2$, $y \ge 0$, orientert mot klokka.