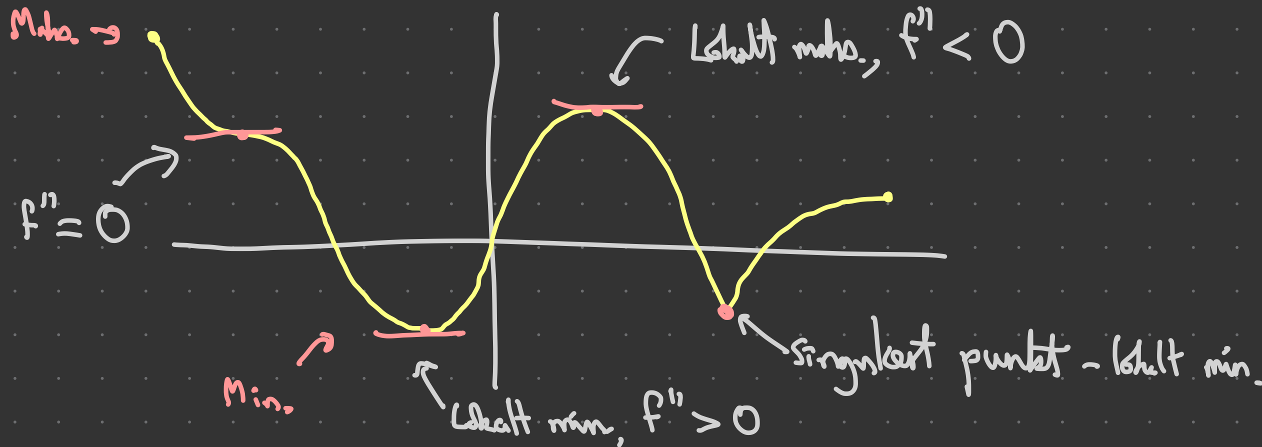
OVERSIKTSFORELESNING 5



Ekstremalverdier i 1 variabel:

$f: I \to \mathbb{R}, \quad I \subseteq \mathbb{R}$

- Ekstremalpunkter er enten
  - kritiske punkter: x, $f'(x) = 0$
  - singulære punkter: x, $f'(x)$ ikke eksisterer
  - randpunkter av I

- Hvis I er et lukket intervall har f et (globalt) maksimum og minimum i I

- Annenderivert test: x, $f'(x) = 0$
  - $f''(x) > 0$, lokalt minimum
  - $f''(x) < 0$, lokalt maksimum
  - $f''(x) = 0$, ingen konklusjon

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$

<u>Def</u>: $\vec{x} \in D$ er et

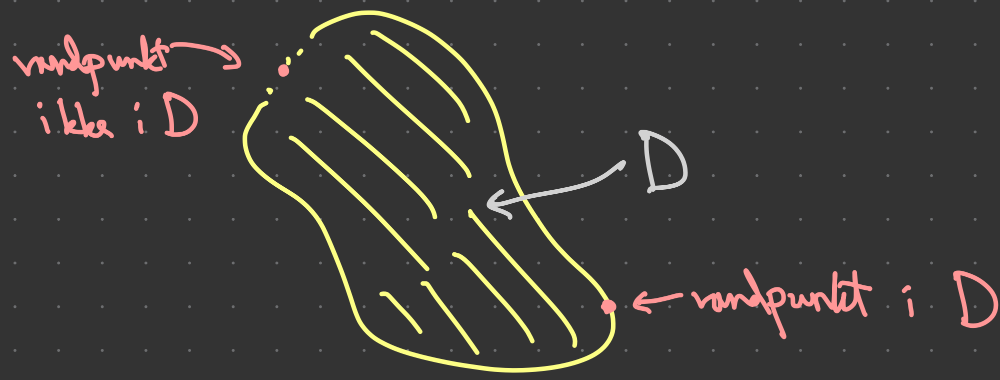
- (globalt) <u>maksimumspunkt</u> hvis $f(\vec{x}) \geq f(\vec{y})$ for alle $\vec{y} \in D$
- <u>lokalt maksimumspunkt</u> hvis $f(\vec{x}) \geq f(\vec{y})$ for alle $\vec{y} \in D$ i en omegn av $\vec{x}$

- (globalt) minimumspunkt hvis $f(\vec{x}) \leq f(\vec{y})$ for alle $\vec{y} \in D$
- lokalt minimumspunkt hvis $f(\vec{x}) \leq f(\vec{y})$ for alle $\vec{y} \in D$ i en omegn av D

(Globale / lokale) ekstremalpunkter = (globale / lokale) maksimums- og minimumspunkter.

Def: $\vec{x} \in D$ er et kritisk punkt for f hvis $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ og et singulært punkt hvis f ikke er deriverbar i $\vec{x}$.

Def: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ er et randpunkt av $D \subseteq \mathbb{R}^n$ hvis det finnes punkter i D og ikke i D vilkårlig nær $\vec{x}$.



<u>Teorem 13.1</u>: Hvis $\vec{x} \in D$ er et ekstremalpunkt for f så er enten et kritisk punkt for f, et singulært punkt for f, eller et randpunkt av D.

<u>Def</u>: Et kritisk punkt er et <u>sadelpunkt</u> hvis det er hverken et lokalt maksimum eller et lokalt minimum.

Eksempel: $f(x,y) = 20 + \dfrac{8xy}{1+x^2+y^2}$ for $x^2+y^2 \le 4$

Finn maksimal verdien av f.

- Ingen singulære punkter
- Kritiske punkter: $\nabla f(x,y) = \dfrac{8}{(1+x^2+y^2)^2}\left(y(1-x^2+y^2),\ x(1+x^2-y^2)\right)$

$y(1-x^2+y^2) = 0$ $\qquad$ $x(1+x^2-y^2) = 0$

$y = 0$ el. $1-x^2+y^2 = 0$ $\qquad$ $x = 0$ el. $1+x^2-y^2 = 0$

Eneste løsning $x = 0,\ y = 0$

$f(0,0) = 20$

Randpunkter: $x^2+y^2=4$

Parametriser som $g(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$$f(g(t)) = 20 + \frac{8 \cdot 2\cos t \cdot 2\sin t}{1+4}$$

$$= 20 + \frac{16}{5} \sin 2t$$

Maksimum $20 + \frac{16}{5}$ når $\sin 2t = 1$, $t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

Def: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ er lukket hvis alle randpunktene til D ligger i D, og begrenset hvis det finnes $R \ge 0$ slik at $|\vec{x}| \le R$ for alle $\vec{x} \in D$.

Teorem 13.2 (Ekstremalverdisetningen): Hvis $D \subseteq \mathbb{R}^n$ er lukket og begrenset, og $f: D \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, så har f globale maksimums- og minimumspunkter i D.

Annenderiverttesten

Eksempel: $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$

Klassifisér de kritiske punktene til f.

$$\nabla f = (3e^y - 3x^2,\ 3xe^y - 3e^{3y})$$

Kritiske punkter:

$$e^y - x^2 = 0 \qquad xe^y - e^{3y} = e^y\left(x - e^{2y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^{2y}$$

$$e^y - e^{4y} = 0$$

$$\shortparallel$$

$$e^y\left(1 - e^{3y}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = e^{3y}$$

$$\Leftrightarrow y = 0, \quad x = 1$$

Én løsning: $(x, y) = (1, 0)$

Annenderivate:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3e^y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3xe^y - 9e^{3y}$$

$$A = -6 < 0 \qquad B = 3 \qquad C = 3 - 9 = -6$$

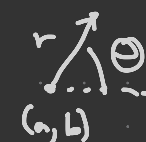
$$\Delta = AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

$\Rightarrow$ lokalt maksimum

Forklaring:

(a,b) et kritisk punkt for $f(x,y)$

Fastsett θ og definér $g(r) = f(a + r\cos\theta,\ b + r\sin\theta)$



$$g'(r) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

$$= \nabla f \cdot (\cos\theta, \sin\theta)$$

$(= 0 \text{ for } r = 0)$

$$g''(r) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

$$g''(0) = A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta$$

Hvis dette er < 0 for alle θ er (a,b) et lokalt maksimum for f

> 0 — " — — " — lokalt minimum for f

For $A \neq 0$ kan vi skrive

$$g''(0) = \frac{(A\cos\theta + B\sin\theta)^2 + (AC - B^2)\sin^2\theta}{A}$$

Lagrangemultiplikatorer

Vi ønsker å finne maksimum/minimum for $f(x,y)$ langs kurve C i $\mathbb{R}^2$

Hvis C er parametrisert av $\vec{h}: I \to \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $\vec{h}'(t) \neq \vec{0}$ for $t \in I$, da er vi interessete i

ekstremalpunkter for $f(\vec{h}(t))$

Kritiske punkter for $f(\vec{h}(t))$:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{h}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nabla f(h(t)) \cdot \vec{h}'(t)$$

$\vec{h}(t) = (x(t), y(t))$

$\vec{h}'(t) \neq 0$ så dette er $0 \iff \nabla f$ ortogonal til $\vec{h}'(t)$

$\iff \nabla f$ er normal til C

Hvis $\mathcal{C}$ er definert som $g(x,y) = 0$

kan vi finne disse punktene uten å velge parametrisering.

∇g er normal til tangenten av $\mathcal{C}$

Hvis $\nabla g \neq \vec{0}$ langs $\mathcal{C}$ så er dette punktene der

∇f og ∇g er parallelle.

Dvs. at vi ser etter punkter (x,y) der

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$g(x,y) = 0$$

Dette er de kritiske punktene til Lagrange-funksjonen

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

$$\nabla \mathcal{L} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y},\ -g(x,y) \right)$$

Eksempel: Finn punktene på hyperbelen $xy = 3$ nærmest origo.

Dette er minimum for $f(x,y) = x^2 + y^2$

der $g(x,y) = xy - 3 = 0$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 3)$$

$$\nabla \mathcal{L} = (2x - \lambda y,\ 2y - \lambda x,\ 3 - xy)$$

Kritiske punkter: $2x = \lambda y$

$2y = \lambda x$

$3 - xy = 0$

$$2x^2 = \lambda xy = 2y^2 \Rightarrow x^2 = y^2$$

$x = y$ eller $x = -y$

$x = y$

$3 - x^2 = 0 \rightsquigarrow x = y = \pm\sqrt{3}$

$x = -y$

$3 + x^2 = 0$ - ingen løsning

Punktene $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$ er de to kritiske punktene til $\mathcal{L}$

Eksempel:

$$f(x,y) = x^2 y + \frac{1}{3} y^3 - x^2 - 2y$$

Finn den minste/største verdien til f på sirkelen $x^2+y^2=6$

$$g(x,y) = x^2+y^2-6 = 0$$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2y + \frac{1}{3}y^3 - x^2 - 2y - \lambda(x^2+y^2-6)$$

$$\nabla \mathcal{L} = \left(2xy - 2x - 2\lambda x,\ x^2+y^2-2-2\lambda y,\ -(x^2+y^2-6)\right)$$

$2x(y-1-\lambda) = 0 \iff x = 0$ eller $\lambda = y-1$

$x^2+y^2-2\lambda y = 0$

$x^2+y^2-6 = 0$

$x = 0$:

$y^2 - 2 - 2\lambda y = 0$

$y^2 = 6$

$y = \pm\sqrt{6}$

$\lambda = y-1$

$x^2+y^2-2(y-1)y = 0$

$6 - 2(y-1)y = 0$

$y^2 - y - 2 = 0$

$\rightsquigarrow \; y = 2, \; -1$

$y=2$ gir $x^2 = 2$ og $x = \pm\sqrt{2}$

$y=-1$ gir $x^2 = 5$ og $x = \pm\sqrt{5}$

6 punkter $(0, \pm\sqrt{6})$, $(\pm\sqrt{2}, 2)$, $(\pm\sqrt{5}, -1)$

$f(0, \pm\sqrt{6}) = 0$

$f(\pm\sqrt{2}, 2) = \frac{2}{3}$ ← maksimum

$f(\pm\sqrt{5}, -1) = -\frac{25}{3}$ ← minimum

Eksempel: Finn største/minste verdi av samme f på $x^2+y^2 \leq 6$

- f har ingen singulære punkter

Kritiske punkter for f:

$$\nabla f = (2xy - 2x,\ x^2+y^2-2) = \vec{0}$$

$2x(y-1) = 0$ og $x^2+y^2 = 2$

$x = 0$ eller $y = 1$

$y^2 = 2$ $x^2 = 1$

$y = \pm\sqrt{2}$ $x = \pm 1$

$\rightsquigarrow \quad (0, \pm\sqrt{2})$ og $(\pm 1, 1)$

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(y-1), \quad B = 2x, \quad C = 2y$

$\Delta = AC - B^2 = 4y(y-1) - 4x^2$

Punkt:	A:	Δ:	Type
$(0, \sqrt{2})$	$2(\sqrt{2}-1) > 0$	$4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) > 0$	Minimum
$(0, -\sqrt{2})$	$2(-\sqrt{2}-1) < 0$	$4(-\sqrt{2})(-\sqrt{2}-1) > 0$	Maksimum
$(\pm 1, 1)$	0	$-4 < 0$	Sadelpunkt

$$f(0, \sqrt{2}) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$f(0, -\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Globalt maksimum: $(0, -\sqrt{2})$

— " — minimum $(\pm\sqrt{5}, -1)$