TMA4105 - ØF 3 - Mandag 25/1/2021

12.1: Flervariable funksjoner

<u>DEF</u>: La $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ være en mengde. Vi sier at $f: D_f \to \mathbb{R}$ er en funksjon av n uavhengige variable dersom det for hver $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D_f$ finnes et unikt tall w slik at

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = w$$

$n=2$: $f(x,y)$
$n=3$: $f(x,y,z)$

- D_f kalles <u>definisjonsmengden</u>
- <u>Verdimengden</u> er $V_f = \{ f(\vec{x}) : \vec{x} \in D_f \} \subseteq \mathbb{R}$

<u>Eks</u>: $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

1) Hva er D_f?

$$16 - x^2 - y^2 > 0 \implies x^2 + y^2 < 16 = 4^2$$

$$D_f = \{ (x,y) : x^2+y^2 < 4^2 \}$$

2) Hva er V_f?

$$V_f = \{ f(x,y) : (x,y) \in D_f \} = [\tfrac{1}{4}, \infty)$$

Når D_f ikke er oppgitt velger vi den største D_f hvor f er veldefinert (naturlig def.-mengde).

3) Grafen til f:

Grafen til $z = f(x,y)$ er mengden

$$\{ (x,y,f(x,y)) : (x,y) \in D_f \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

For et tall $c \in V_f$ kalles kurven i xy-planet gitt ved $f(x,y) = c$ nivåkurven til f i "høyde" c.

Eks forts. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

For $\frac{1}{4} \leq c < \infty$ får vi

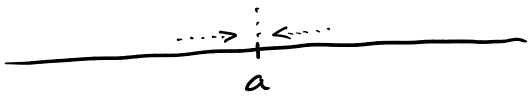
$$f(x,y) = c \iff c^2 = \frac{1}{16-x^2-y^2}$$

$$x^2+y^2 = 16 - 1/c^2$$

Merk:
- Nivåkurvene er alltid inneholdt i D_f
- Hvis $w = f(x,y,z)$, så gir $f(x,y,z) = c$ en nivåflate.

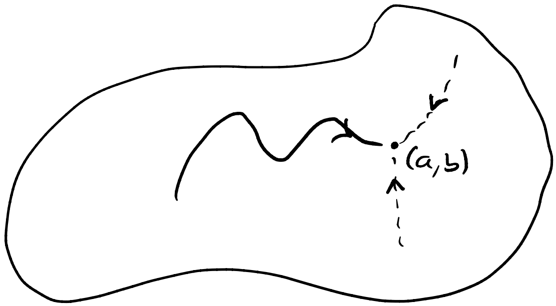
12.2: Grenseverdi og kontinuitet

M1: På $\mathbb{R}$



Nå: På $\mathbb{R}^2$

$\cdot(a,b)$



Avstanden fra $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ til $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ er

$$|(x,y)-(a,b)| = |(x-a,\, y-b)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

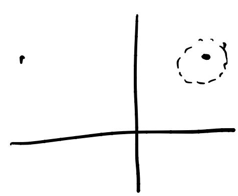
DEF: Vi sier at L er grenseverdien til funksjonen $f=f(x,y)$ i punktet (a,b), og skriver

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

hvis

i) det for enhver $\delta > 0$ finnes minst ett punkt $(x,y) \in D_f$ som oppfyller

$$0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta .$$



ii) for enhver $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at hvis $(x,y) \in D_f$ og $|(x,y)-(a,b)| < \delta$, så er $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Funksjonen $f = f(x,y)$ er kontinuerlig i (a,b) hvis

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

<u>Merk</u>: Det kan være nyttig å bruke polarkoord. om vi skal regne ut

$$(*) \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \qquad (x,y) = [r,\theta]$$

Sett $x = a + r\cos\theta$

$y = b + r\sin\theta$

Hvis

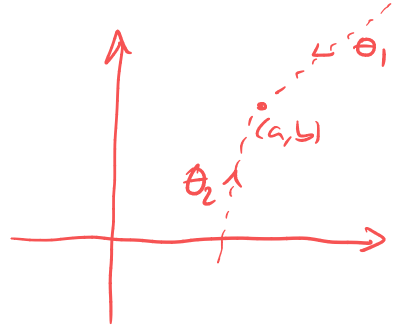
$$\lim_{r\to 0^+} f(a + r\cos\theta,\ b + r\sin\theta)$$

eksisterer og er <u>uavhengig</u> av θ, så eksisterer også $(*)$ og grenseverdien er lik.

Avhenger av θ

$\Downarrow$

(*) eksisterer <u>ikke</u>



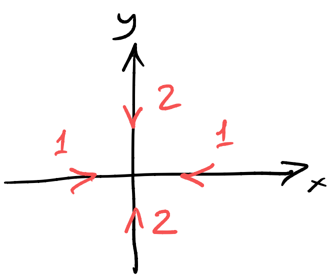
Eksempel:

Eksisterer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$?

$$f(x,y) = 1 + \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \lim_{r\to 0^+}\left(1 + \frac{r^2\sin^2\theta}{r^2}\right)$$

$$= 1 + \sin^2\theta$$



<u>"Snarvei"</u>: Hvis vi kan nærme oss punktet (a,b) fra to ulike retninger, og få <u>ulik</u> grenseverdi for $f(x,y)$, så eksisterer ikke (*).

I dette eksempelet (feks) langs koordinat-aksene:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{0^2}{x^2+0^2}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\neq$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0}\left(1+\frac{y^2}{0^2+y^2}\right) = 2$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ eksisterer <u>ikke</u>.

<u>12.3: Partiellderivasjon</u>

De partiellderiverte av $f(x,y)$ med hensyn på x og y er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

gitt at disse eksisterer.

<u>Eks</u>: $f(x,y) = xe^{x^2y}$

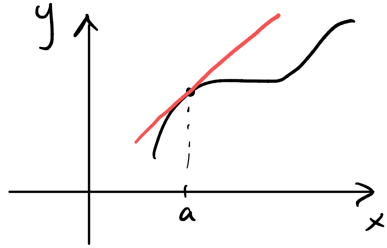
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2y} + xe^{x^2y}\cdot 2xy = e^{x^2y}(1+2x^2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{x^2y}\cdot x^2 = x^3e^{x^2y}$$

Notasjon: $\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x = \underbrace{f_1 = D_1 f}_{\text{boka}}$

<u>Mf</u>: Tangenten til $y=f(x)$ i $x=a$ er

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$



<u>Nå</u>: $\left.\begin{array}{l}\vec{T}_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) \\ \vec{T}_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)\end{array}\right\}$ tangenter til $z=f(x,y)$ i $(a,b,f(a,b))$

Normalvektor til $z=f(x,y)$ i punktet $(a,b,f(a,b))$ er

$$\vec{n} = \vec{T}_1 \times \vec{T}_2 = \ldots = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$$

Ligningen for tangentplanet blir

$$0 = \vec{n}\cdot(x-a, y-b, z-f(a,b))$$

$$\Updownarrow$$

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Eksempel:

Finn tangentplan til

$$z = f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad i \quad (2,2,4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = 6$$

Vi får tangentplanet

$$z = 4 + 6(x-2) + 6(y-2)$$

12.4: Høyere ordens partiell deriverte

Notasjon:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = (f_x)_x \quad \underbrace{(= f_{11})}_{\text{boka}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = (f_y)_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = (f_y)_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = (f_x)_y$$

Retur eks: $f(x,y) = xe^{x^2y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2y}(1+2x^2y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3e^{x^2y}$$

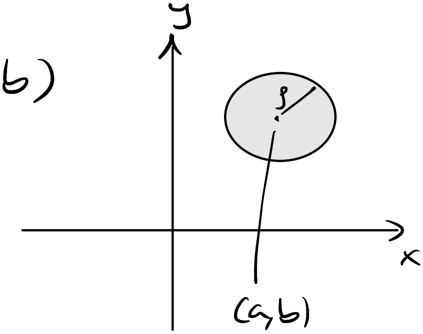
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = x^2e^{x^2y}(1+2x^2y) + e^{x^2y}\cdot 2x^2$$
$$= x^2e^{x^2y}(3+2x^2y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 3x^2e^{x^2y} + x^3e^{x^2y}\cdot 2xy$$
$$= x^2e^{x^2y}(3+2x^2y)$$

Teorem 12.1

Hvis det finnes en $\rho > 0$ slik at både $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ eksisterer for alle (x,y) med $|(x,y)-(a,b)| < \rho$ og begge funksjoner er kontinuerlige i (a,b), så er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$



Eks:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Kan vises at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

(Kontinuitet i $(0,0)$ feiler)

10.5: Kvadratiske flater

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$$
$$+ Gx + Hy + Iz + J = 0 \qquad (A, \dots, J \in \mathbb{R})$$

1) Sylinder:
   - i) Elliptisk: $\frac{y^2}{2^2} + z^2 = 1$
   - ii) Parabolsk: $z = y^2$
   - iii) Hyperbolsk: $y^2 - z^2 = 1$

   eks

2) Paraboloide: $z = Ax^2 + By^2$

i) Elliptisk: $x^2 + \frac{y^2}{2^2} = z$

ii) Hyperbolsk: $x^2 - \frac{y^2}{2^2} = z$

eks

3) Ellipsoide:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

eks

4) Kjegle:

$$\frac{x^2}{2^2} + y^2 = z^2$$

eks

5) Hyperboloide:

i) Sammenhengende: $\frac{x^2}{2^2} + y^2 - z^2 = 1$

ii) Usammenhengende: $\frac{x^2}{2^2} + y^2 - z^2 = -1$

eks