Plan: Linjeintegraler $\longrightarrow$ av skalarfunksjoner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\searrow$ i vektorfelt $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Flateintegraler $\longrightarrow$ av skalarfnk $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\searrow$ i vektorfelt $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Parametriseringer

Linjeintegraler av skalarfnk (15.3)

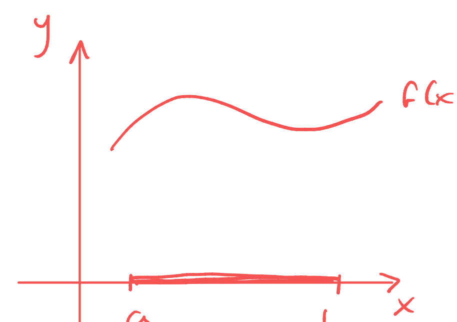
$\mathcal{C}$ er en kurve i $\mathbb{R}^n$, $\quad f: \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

Kan vi integrere f over $\mathcal{C}$?

La $\mathcal{C}$ være parametrisert ved $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$.

Første "forslag":

$$\cancel{\int_a^b f(\vec{r}(t))\, dt} \quad ?$$



Bruker buelengdeparametriseringen. Får da en unik verdi for linje-integralet.

<u>DEF</u>: Linjeintegralet av f langs $\mathcal{C}$ med parametrisering $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ er

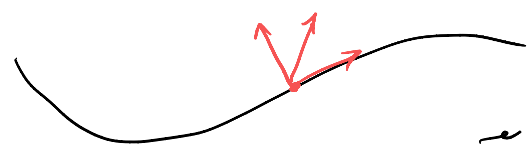
$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

Detaljert gjennomgang i OF 9 - 32:15

Linjeintegraler i vektorfelt (15.4)

Kurve $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^n$

Vektorfelt $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$



Linjeintegralet til tangentkomponenten til et vektorfelt $\vec{F}$ langs kurven $\mathcal{C}$ er definert ved

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \underbrace{\vec{F}\cdot\hat{T}}_{\text{skalarfunksjon}}\,ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

Hvis $\mathcal{C}$ er param. ved $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$, så er $\hat{T} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$

Hvis $\vec{F} = (P, Q, R)$, kan vi bruke notasjonen

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(\underbrace{x,y,z}_{\vec{r}(t)})\,\underbrace{dz}_{z'(t)\,dt}$$

Detaljer: OF 9 – 48:30 + boka s. 880

Eksempel Vår 2016 - oppg. 5

$$\vec{F}(x,y,z) = (\underbrace{ye^{xy}\cos z}_{F_1},\ \underbrace{xe^{xy}\cos z}_{F_2},\ \underbrace{1 - e^{xy}\sin z}_{F_3})$$

Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

der $\mathcal{C}$ er gitt ved $\vec{r}(t) = (3\cos t,\ 6\sin^2 t,\ 5t)$, $0 \le t \le 2\pi$

Løsning: Ser at $\vec{r}(0) = (3, 0, 0)$

$\vec{r}(2\pi) = (3, 0, 10\pi)$

La $\mathcal{C}'$ være den rette linja fra $(3,0,0)$ til $(3,0,10\pi)$.* Fordi feltet er konservativt, har vi

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}'} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}'} \cancel{F_1\,dx} + \cancel{F_2\,dy} + F_3\,dz$$

$$= \int_{\mathcal{C}'} (1 - e^{xy}\sin z)\,dz = \int_0^{10\pi} (1 - \sin z)\,dz = \ldots = \underline{10\pi}$$

* Alternativt: Denne kan parametriseres som

$$\vec{r}(t) = (3, 0, t), \quad 0 \le t \le 10\pi$$

$$\vec{r}\,'(t) = (0, 0, 1)$$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}'} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{10\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{10\pi} F_3(\vec{r}(t))\,dt = \int_0^{10\pi} (1 - \sin t)\,dt = \ldots = \underline{10\pi}$$

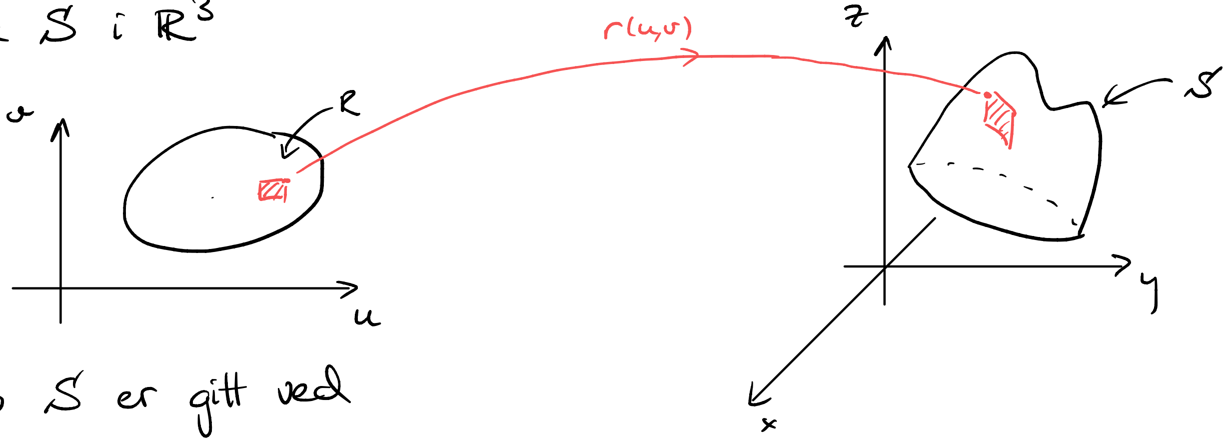
* Alt 2: Finn potensialfunksjonen Φ. Da er $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{r}(2\pi)) - \Phi(\vec{r}(0))$.

Flateintegraler (15.5 - 15.6)

Areal av en flate (15.5)

Gitt parametrisering $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in R \subseteq \mathbb{R}^2$

av flate S i $\mathbb{R}^3$



Areal av S er gitt ved

$$\text{areal}(S) = \iint_S dS = \iint_R \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$

Detaljert gjennomgang i OF10 - 18:30

"Spesialtilfelle":

Flaten er gitt som $z = f(x,y)$, $(x,y) \in R$

Kan da velge parametriseringen

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

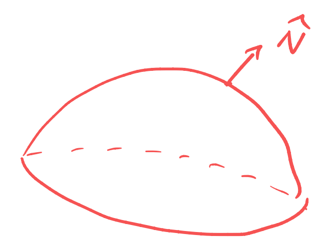
Flateintegral av skalarfunksjoner

Flateintegralet av en kontinuerlig fnk $f: S \to \mathbb{R}$ over S er gitt ved

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_R f(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\, dv$$

Fluksintegraler - eller flateintegraler i vektorfelt

La $(S, \hat{N})$ være en orientert flate, $\vec{F}: S \to \mathbb{R}^3$ et kontinuerlig vektorfelt på S



Flateintegralet av $\vec{F}$ over S er gitt ved

$$\boxed{\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \underbrace{\vec{F}\cdot\hat{N}}_{\hookrightarrow \text{ Skalarfunksjon!}}\, dS = \pm \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) du\, dv}$$

Hvis S er parametrisert ved $\vec{r}: R \to S$, så er

$$\vec{n} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$$

normal på S, altså $\vec{n} \parallel \hat{N} \Rightarrow \hat{N} = \pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Dermed er $\hat{N}\, dS = \vec{n}\, du\, dv = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) du\, dv$

Tilbake til "spesialtilfelle":

Flate gitt ved $z = f(x,y)$, $(x,y)\in R \subseteq \mathbb{R}^2$

Da er $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $(x,y)\in R$, og

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

Dermed er

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS = \pm\iint_R \vec{F}(x,y,f(x,y))\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)dx\,dy$$

Detaljert gjennomgang OF10 - 52:00

<u>Eksempel</u>: V2004, oppgave 6b

Vi skulle finne $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl}\,\vec{F}\cdot\hat{N}\,dS$

der flaten S er flaten gitt ved

$$z = 2-x-y, \quad x^2+(y-1)^2 \le 1$$

Normalvektor til S er $(1,1,1)$. Dermed er $\hat{N}\,dS = (1,1,1)\,dx\,dy$.

Mer detaljert; Vi parametriserer S som

$$\vec{r}(x,y) = (x,y,2-x-y), \quad (x,y)\in R = \{(x,y) : x^2+(y-1)^2\le 1\}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = (1,1,1)$$

Dermed er

$$\hat{N}\, dS = \pm \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) dx\,dy = \pm (1,1,1)\, dx\,dy$$

<u>Eksempel: Vår 2016 - oppg 8</u>

Flate S: $z = x^2$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$

$\vec{F}(x,y,z) = (e^y, e^z, e^x)$

Finn $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, der ∂S er orientert mot klokka sett ovenfra.

<u>Løsning</u>: Ved Stokes' teorem er

$$I = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl}\, \vec{F} \cdot \hat{N}\, dS$$

pos. z-komp

$$\text{curl}\, \vec{F} = \dots = (-e^z, -e^x, -e^y)$$

Finner en parametrisering av S:

$$z = f(x,y) = x^2, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(x,y) = (x, y, x^2),$$

Dermed er

pos z-komp

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2x, 0, 1)$$

og $\hat{N}\, dS = (-2x, 0, 1)\, dx\, dy$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^1 \int_0^2 \left(2xe^{\cancel{z}\, x^2} - e^y\right) dx\, dy = \dots = e^4 - 2e + 1.$$

Parametriseringer

1) Trening!

2) Parametrisering av en sirkel med radius R og sentrum i (a,b):

$\vec{r}(t) = (R\cos t + a,\ R\sin t + b)$, $0 \le t \le 2\pi$ (mot klokka)

$\hookrightarrow 2\pi - t$

3) Skjæring av to flater, hvorav én bare avhenger av to variable; begynn med denne! Eks:

$x^2 + y^2 = 4$ skjærer planet $z = 2 - x - y$

Setter $\left.\begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= 2\sin t \end{aligned}\right\}$ $0 \le t \le 2\pi$ $\}$ dytter inn her

$(z = s)$

$z = 2 - 2\cos t - 2\sin t$

$\Rightarrow$ Skjæringskurven er gitt ved

$\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 2 - 2\cos t - 2\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$

Hva så med flaten i planet innenfor denne kurven?

$x^2 + y^2 \le 4$, $z = 2 - x - y$

$$\vec{r}(x,y) = (x,\, y,\, 2-x-y) \quad \text{for } \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\}$$

Polarkoord:

$$\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, 2-r\cos\theta-r\sin\theta), \quad \underbrace{0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi}$$

"Praktisk" fordi vi får et rektangel av parameterverdier.