OVERSIKTSFORELESNING 11

Divergens og curl (16.1)

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ (skalarfelt)

$D \subseteq \mathbb{R}^3$

Gradienten av f er $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ (vektorfelt)

∇ = nabla / del

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$\vec{F}$ et vektorfelt på $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (P, Q, R)$

Divergensen til $\vec{F}$ er $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Curlen til $\vec{F}$ er $\operatorname{curl}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Eksempel: $\vec{F}(x,y,z) = (x^2yz, \; xy^2z, \; xe^{y^2})$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(xe^{y^2})$$

$$= 2xyz + 2xyz + xye^{y^2} = xy(4z + e^{y^2})$$

$$\text{curl}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(xe^{yz}) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z),\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz) - \frac{\partial}{\partial x}(xe^{yz}),\ \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz) \right)$$

$$= \left(zxe^{yz} - xy^2,\ x^2y - e^{yz},\ y^2z - x^2z \right)$$

<u>Div og curl i planet</u>: $\vec{F}$ et vektorfelt på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (P, Q)$

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \text{curl}\,\vec{F} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

La $\vec{G}$ være $(P, Q, 0)$ og betrakt $\mathbb{R}^2$ som xy-planet i $\mathbb{R}^3$

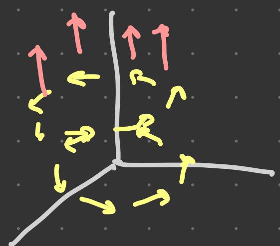
$$\text{div}\,\vec{G} = \text{div}\,\vec{F}$$

$$\text{curl}\,\vec{G} = \text{curl}\,\vec{F}.$$

Tolkning av div og curl: div $\vec{F}$ er et mål på spredningen av $\vec{F}$ i hvert punkt, curl $\vec{F}$ er et mål på rotasjonen av $\vec{F}$ (retningen av curl $\vec{F}$ = aksen det er størst rotasjon rundt)

Eksempel: $\vec{F} = (-\lambda y, \lambda x, 0)$

$\lambda > 0$



curl $\vec{F} = (0, 0, 2\lambda)$ peker langs z-aksen

- $\lambda > 0$ peker curl $\vec{F}$ oppover
- $\lambda < 0$ peker curl $\vec{F}$ nedover

Regneregler for div og curl (16.2)

For f et skalarfelt skriver vi

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Her kalles $\Delta = \nabla^2$ Laplace-operatoren.

To viktige identiteter:

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \qquad (\vec{F} \text{ vektorfelt})$$

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \nabla \times \nabla f = \vec{0} \qquad (f \text{ skalarfelt})$$

Her må $\vec{F}$ og f være glatte, eller i det minste at blandede partiellderiverte er like

Bevis: $\vec{F} = (P, Q, R)$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}$$

$= 0$ (hvis blandede partiellderiverte er like: $\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}$ osv.)

$$\nabla \times \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

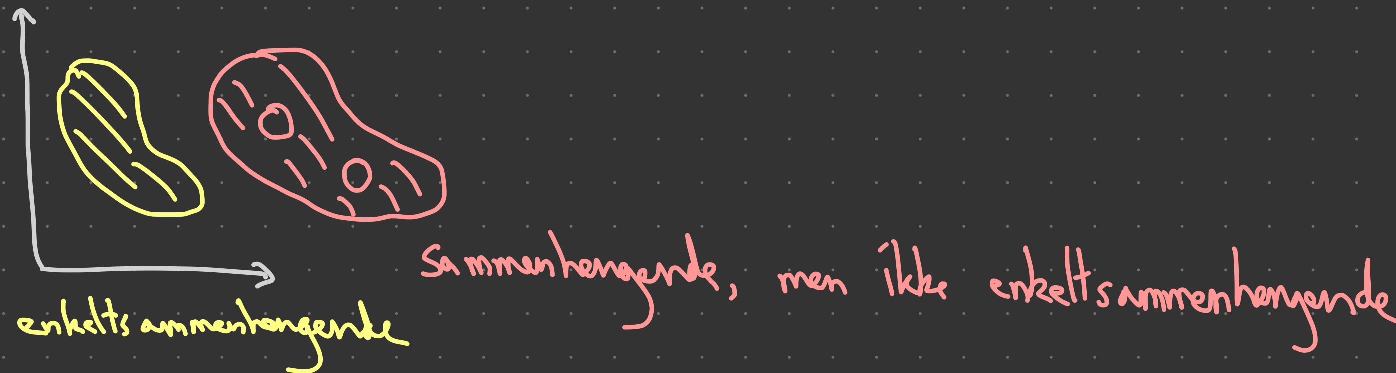
$= \vec{0}$.

Merk:

- Hvis $\vec{F} = \nabla \varphi$ ($\vec{F}$ er <u>konservativt</u>, φ er en <u>potensialfunksjon</u> for $\vec{F}$) har vi $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

- Hvis $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ sier vi at $\vec{G}$ er et <u>vektorpotensial</u> for $\vec{F}$. Da er $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

<u>Def</u>: Et sammenhengende område D er <u>enkeltsammenhengende</u> hvis enhver enkel, sammenhengende, lukket kurve i D kan trekkes sammen til et punkt uten å forlate D.



Merk: $\mathbb{R}^n$ er enkeltsammenhengende

Teorem 16.4: $D \subseteq \mathbb{R}^3$ enkeltsammenhengende og $\vec{F}$ et glatt vektorfelt på D slik at $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ ($\vec{F}$ er curl-fritt / rotasjonsfritt, "irrotational"). Da er $\vec{F}$ konservativt: det finnes et skalarfelt φ på D med $\vec{F} = \nabla \varphi$.

Teorem 16.5: $D \subseteq \mathbb{R}^3$ et område slik at enhver lukket flate i D avgrenser et område inneholdt i D, og $\vec{F}$ et glatt vektorfelt på D slik at $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ ($\vec{F}$ er divergensfritt "solenoidal"). Da har $\vec{F}$ et vektorpotensial: det finnes et vektorfelt $\vec{G}$ på D slik at $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$.

Eksempel: $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x, 0)$

$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

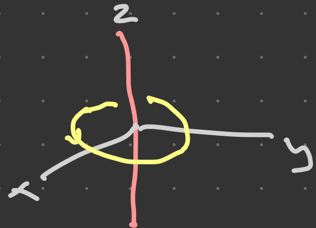
C kurven $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$

Men $\oint_C \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = 0$ for alle lukkede kurver C.

$\Rightarrow \vec{F}$ er ikke konservativt selv om $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

$\vec{F}$ er definert på $\mathbb{R}^3$ minus z-aksen – ikke enkeltsammenhengende



Eksempel: Finn et vektorpotensial for $\vec{F}(x,y,z) = (-2z, 2x, 2xy)$ på $\mathbb{R}^3$.

$\operatorname{div}\vec{F} = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{F}$ har et vektorpotensial

Hvis $\vec{G} = (P, Q, R)$ og $\operatorname{curl}\vec{G} = \vec{F}$ har vi

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2z \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$$

Vi har stor frihet i valg av $\vec{G}$: hvis $\vec{G}$ er et vektorpotensial er også $\vec{G} + \nabla\varphi$ det, for alle skalarfelt φ

Vi kan anta $R = 0$.

Da er
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 2z \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$$

$$Q = z^2 + f(x,y) \qquad P = 2xz + g(x,y)$$

Vi kan anta $f(x,y) = 0$.

Da får vi $-\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial y} = 2xy \Rightarrow g = -xy^2 + h(x)$

Vi kan anta $h(x) = 0$ og får da at

$$\vec{G} = (2xz - xy^2, z^2, 0)$$

er en løsning.

Greens teorem (16.3)

I én variabel har vi $\int_a^b \frac{df}{dt}\, dt = f(b) - f(a)$

Greens teorem er en 2-dimensjonal versjon av dette.

Def: $R \subseteq \mathbb{R}^2$ et område med rand $C = \partial R$.
Vi sier at C er positivt orientert hviss vi orienterer hver av kurvene i C slik at R ligger på venstre side når

Vi beveger oss langs $\mathcal{C}$ i retningen gitt av orientasjonen.

<u>Def</u>: $R \subseteq \mathbb{R}^2$ er <u>regulært</u> hvis R kan deles opp i endelig mange deler som er både x-enkle og y-enkle.

R_1, R_2 både x- og y-enkle

<u>Greens teorem</u> (Teorem 16.6): $R \subseteq \mathbb{R}^2$ et regulært område med rand $C = \partial R$, positivt orientert. Hvis C består av et endelig antall glatte, enkle, lukkede kurver og $\vec{F} = (P, Q)$ er et glatt vektorfelt på R, da har vi:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

<u>Bevis:</u> Anta først at R er både x- og y-enkelt

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

$$= \{(x,y) : c \leq y \leq d,\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx = \int_a^b \left(P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x)) \right) dx$$

$$= \int_a^b P(x, f_2(x)) - \int_a^b P(x, f_1(x))\, dx$$

$$= -\int_{C_2} P(x,y)\, dx - \int_{C_1} P(x,y)\, dx$$

$$= -\oint_C P(x,y)\, dx$$

Tilsvarande har vi $\displaystyle \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA = \oint_C Q(x,y)\, dy$

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Mer generelt kan vi dele opp R i områder som er x- og y-enkle

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{R_1} \cdots + \int_{R_2} \cdots$$

$$= \oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$C_1 = \partial R_1$, $C_2 = \partial R_2$

Den delen av ∂R_1 som ikke ligger i ∂R opptrer også i ∂R_2 med omvendt orientering – disse to kansellerer og vi får

$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Tilsvarende for flere deler av R.

<u>Eksempel:</u> La $R \subseteq \mathbb{R}^2$ være området avgrenset av $x^2+y^2=1$ og $x+y=1$. La $C = \partial R$, positivt orientert.

$$\oint_C (2x+2y)\,dx + (6xy + 2x - \cos y)\,dy$$

$$= \oint_C (2x+2y,\ 6xy+2x-\cos y) \cdot d\vec{r} \quad \left(\text{"} d\vec{r} = (dx, dy) \text{"}\right)$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(6xy+2x-\cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(2x+2y) \right) dA$$

$$= \iint_R 6y + 2 - 2 \, dA = \iint_R 6y \, dA$$

$$R = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, \ 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

$$\iint_R 6y \, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} 6y \, dy \, dx = \cdots = 1$$

Merk: $\text{areal}(R) = \iint_R 1 \, dA \underset{\text{Green}}{=} \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ hvis $\vec{F} = (P, Q)$ og $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$

$\mathcal{C} = \partial R$

$$\text{areal}(R) = \oint_{\mathcal{C}} x \, dy = \oint_{\mathcal{C}} -y \, dx = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} x \, dx - y \, dy$$

Divergensteoremet i planet (Teorem 16,7): $R, C, \vec{F}$ som i Greens teorem. Da har vi

$$\iint_R \operatorname{div} \vec{F} \, dA = \oint_C \vec{F} \cdot \hat{N} \, ds$$

$\hat{N}$ = enhetsnormal til C som peker ut av R

$\vec{F} = (P, Q)$

Bevis: Bruk Greens teorem på vektorfeltet $\vec{G} = (-Q, P)$.