OVERSIKTSFORELESNING 10

Flater (15.5)

En flate er et todimensjonalt objekt i $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^n)$

En parametrisert flate i $\mathbb{R}^3$ er en flate S med en parametrisering $\vec{r} : R \longrightarrow S$

$$\begin{matrix} R & \longrightarrow & S \\ \subseteq & & \subseteq \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^3 \end{matrix}$$

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

der:
- $R \subseteq \mathbb{R}^2$ er lukket, begrenset og sammenhengende
- $\vec{r}$ er kontinuerlig og én-én-tydig*

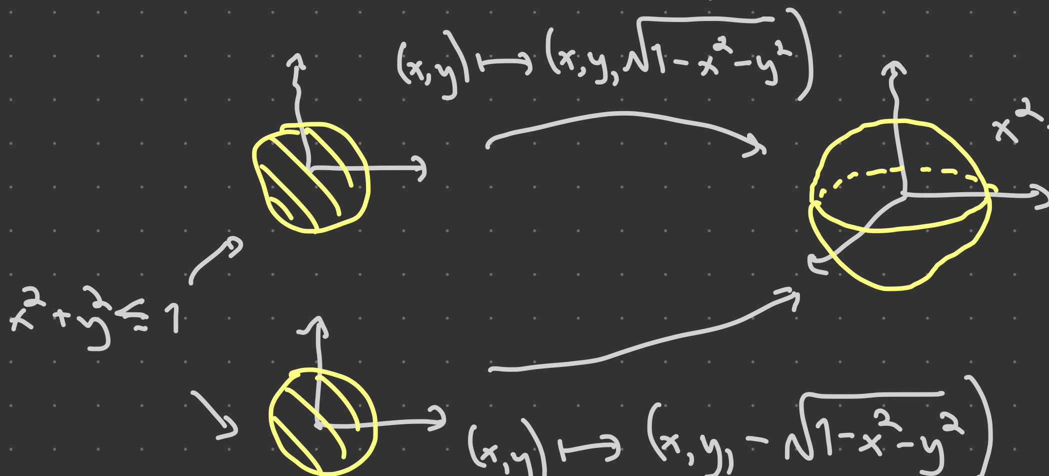
* For integraler holder det at vi har én-én-tydighet borte fra et område med areal 0

Eksempel: Grafen $z = f(x,y)$ kan parametriseres som

$$\vec{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

- her er R definisjonsmengden til f, eller projeksjonen av S i xy-planet.

Merk: Ikke alle flater kan beskrives med bare én parametrisering, men vi kan dele opp flaten i mindre flater som kan parametriseres.



Eksempel: Det implisitte funksjonsteoremet forteller oss at alle flater gitt ved $G(x,y,z)=0$ der $\nabla G \neq \vec{0}$

kan parametriseres i en omegn av hvert punkt på flaten.

<u>Def</u>: En <u>glatt</u> flate er en flate som har et entydig tangentplan i alle punkter som ikke er på randen.

For en parametrisert flate: $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ er kontinuerlige

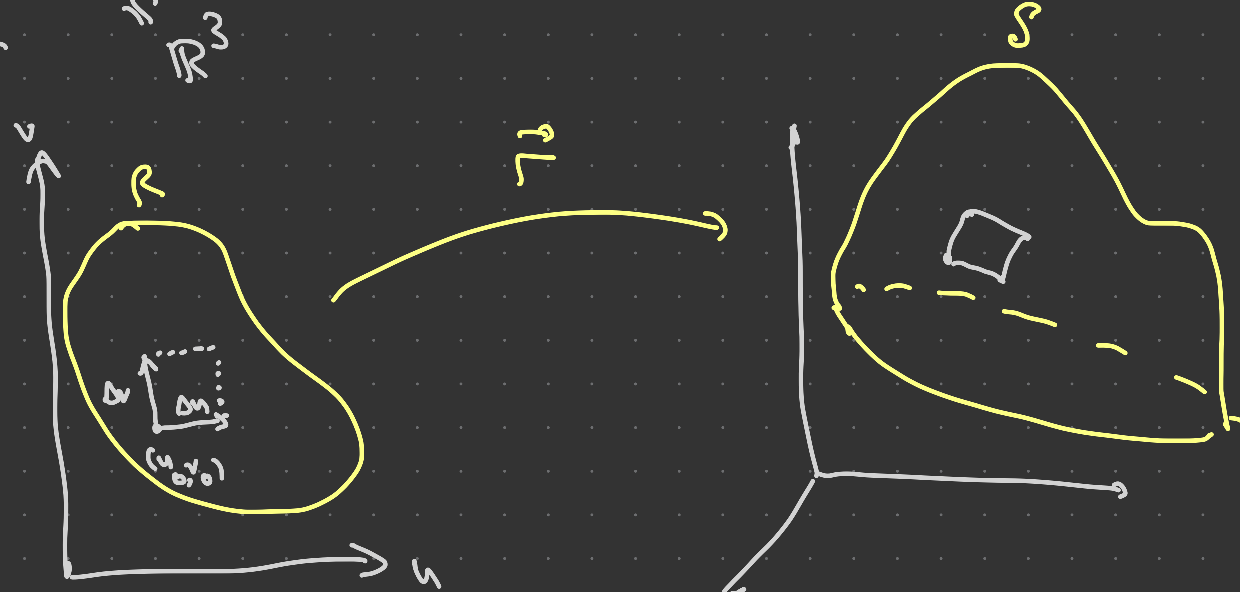
$\vec{r} : R \longrightarrow S$

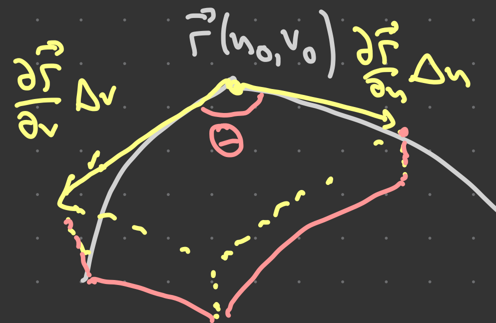
og ikke parallelle

$\iff \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq \vec{0}$ for alle punkter i det indre av R.

Areal av flater (15.5)

$\vec{r} : \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{R}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\cap}{S}}$





For små $\Delta u, \Delta v$ er areal$\left(\vec{r}(\text{rektangel med sider } \Delta u, \Delta v)\right)$

$$\approx \text{areal}\left(\text{parallellogram med sider } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\Delta v\right)$$

$$= \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| \Delta u \cdot \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \Delta v \cdot \sin\theta$$

$$= \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \Delta u \Delta v$$

Via Riemann-summer får vi

$$\text{areal}(S) = \iint_S dS = \iint_R \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\, dv$$

der $dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\, dv$ er arealelementet for S.

Eksempel: Hvis S er grafen $z = f(x,y)$ og $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$

er $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

Flateintegral av funksjoner (15.5)

S glatt flate parametrisert av $\vec{r} : R \to S$

$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$

Flateintegralet av f over S er definert som

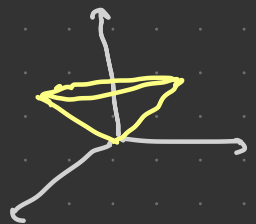
$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_R f(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\, dv$$

Merk:

- uavhengig av valg av parametrisering
- hvis S behøver mer enn én parametrisering kan vi definere flateintegralet ved å dele opp S og ta en sum av slike integraler
- holder at flaten er glatt borte fra område med areal 0 (f.eks. kjegle)
- hvis $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), 0)$ er $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$

(for flater i xy-planet får vi formel for variabelskifte)

Eksempel: Finn $\iint_S x^2 \, dS$ der S er gitt ved $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$.



Parametriser med polarkoordinater:

$$\vec{s}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r) \quad \text{der} \quad \begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 1) \qquad \frac{\partial \vec{s}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial \theta} = (-r\cos\theta, r\sin\theta, -r)$$

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{s}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial \theta} \right| dr\, d\theta = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2} \, dr\, d\theta = \sqrt{2}\, r \, dr\, d\theta$$

$$\iint_S x^2\, dS = \iint_R r^2\cos^2\theta \cdot \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$\left[R = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\} \right]$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\cos^2\theta\, r^3\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{1} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Orienterbare flater (15.6)

En glatt flate S er orienterbar hvis det finnes et kontinuerlig vektorfelt $\hat{N}$ på S som består av enhetsnormaler ($\hat{N}(\vec{p})$ er normal til tangentplanet til S i $\vec{p}$ og $|\hat{N}(\vec{p})| = 1$.) Et slikt vektorfelt $\hat{N}$ kalles en orientering av S.

En orientert flate er en orienterbar flate S med valgt orientering $\hat{N}$

Merk: Hvis $\hat{N}$ er en orientering er $-\hat{N}$ en annen orientering. En orienterbar flate har alltid nøyaktig to orienteringer
sammenhengende

Merk: En orientert flate S gir en orientering av randen av S (som en kurve)

Eksempel: Hvis S er gitt ved $G(x,y,z)=0$ er ∇G normal til S. Dersom $\nabla G \neq \vec{0}$ på S er $\frac{\nabla G}{|\nabla G|}$ en orientering.

Flateintegral av vektorfelt (15.6)

$(S, \hat{N})$ en orientert flate

$\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ et kontinuerlig vektorfelt på S

Flateintegralet av $\vec{F}$ over S er

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS}_{\text{flateintegral av funksjonen } \vec{F}\cdot\hat{N} : S \to \mathbb{R}}$$

Dette kalles også fluksen av $\vec{F}$ gjennom S

eller fluksintegralet av $\vec{F}$ over S

(av latin fluxus = flyt)

Hvis S er parametrisert av $\vec{r} : R \to S$ er

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \quad \text{normal til } S$$

$$\Longrightarrow \hat{N} = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\hat{N}\, dS = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} |\vec{n}|\, du\, dv = \pm \vec{n}\, du\, dv$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du\, dv}$$

En glatt flate kalles __lukket__ hvis den ikke har en rand

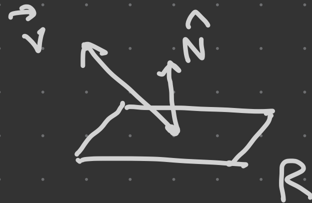
lukket

ikke lukket

Hvis S er lukket skriver vi $\oint\!\!\oint_S \vec{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N}\, dS$

__Fysisk tolkning:__

Vi har en væske som beveger seg med en hastighet $\vec{v}$ og har massetetthet δ.



volum $= (\vec{v}\cdot\hat{N})\Delta t \cdot \text{areal}(R)$

Massen som strømmer gjennom R per tid er $\delta(\vec{v}\cdot\hat{N})\,\text{areal}(R)$

Hvis $\vec{v}$, δ varerer i x,y,z og vi ser på flyten av masse gjennom en generell flate S får vi
$$\iint_S \delta\vec{v}\cdot\hat{N}\,dS$$

<u>Eksempel</u>: Finn $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS$ der

- $\vec{F}(x,y,z) = (2x, 0, 1)$, S er gitt ved $z = 1 + \frac{\pi}{4} - \arctan(x^2+y^2)$

der $x^2+y^2 \leq 1$, $\hat{N}$ peker oppover

Parametrisér S ved $\vec{s}(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, 1+\frac{\pi}{4}-\arctan r^2\right)$

over $R = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\frac{\partial\vec{s}}{\partial r} = \left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{-2r}{1+r^4}\right) \qquad \frac{\partial\vec{s}}{\partial\theta} = \left(-r\sin\theta, r\cos\theta, 0\right)$$

$$\frac{\partial\vec{s}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{s}}{\partial\theta} = \left(\frac{2r^2\cos\theta}{1+r^4}, \frac{2r^2\sin\theta}{1+r^4}, r\right)$$ – peker oppover siden $r \geq 0$

$$\vec{F}(\vec{s}(r,\theta)) = (2r\cos\theta, 0, 1)$$

$$\vec{F}(\vec{s}(r,\theta)) \cdot \left(\frac{\partial\vec{s}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{s}}{\partial\theta}\right) = \frac{4r^3\cos^2\theta}{1+r^4} + r$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_R \left(\frac{4r^3\cos^2\theta}{1+r^4} + r\right) dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{4r^3\cos^2\theta}{1+r^4} + r\right) dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^1 + \cos^2\theta \cdot \int_0^1 \frac{4r^3}{1+r^4}\,dr \right) d\theta$$

$u = 1+r^4$

$du = 4r^3$

$r=0 \Leftrightarrow u=1$

$r=1 \Leftrightarrow u=2$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos^2\theta \cdot \int_1^2 \frac{1}{u}\,du \right) d\theta$$

$$= \pi + \ln 2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta$$

$$= \pi + \ln 2 \cdot \pi = \pi(1+\ln 2).$$

Eksempel: La S være flaten $z = 4 - (x^2+y^2)$ der $z \geq 0$

$$\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$$

Parametriser som $\vec{r}(x,y) = (x, y, 4-(x^2+y^2))$

over $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1,0,-2x), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0,1,-2y)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (2x, 2y, 1)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(x,y)) = (x, y, 4-(x^2+y^2))$$

$$\vec{F}(\vec{r}(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right) = 2x^2 + 2y^2 + 4 - (x^2+y^2)$$

$$= x^2 + y^2 + 4$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iint_R (x^2+y^2+4)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2+4)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 + 2r^2\right]_{r=0}^{2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 12 \, d\theta = 24\pi$$

Kunne også ha brukt parametrisering med polarkoordinater

som $\vec{s}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 4-r^2)$