TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 9
Vektorfelt og linjeintegraler

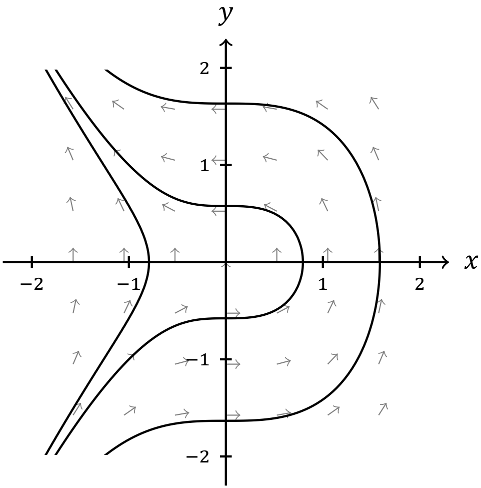
Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

8. mars 2021

Nøkkelbegreper

- Vektorfelt
- Konservative vektorfelt
- Linjeintegraler for funksjoner (skalarfelt)
- Linjeintegraler for vektorfelt

Strømningslinjer



Konservative vektorfelt

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ åpen,
- $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ et konservativt vektorfelt på D,
- F_i kontinuerlige med kontinuerlige første ordens partiellderiverte.

Da har vi

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

for alle $i \neq j$.

Konservative vektorfelt

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ åpen,
- $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ et konservativt vektorfelt på D,
- F_i kontinuerlige med kontinuerlige første ordens partiellderiverte.

Da har vi

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

for alle $i \neq j$.

Bevis: Hvis $\mathbf{F} = \nabla \phi$ har vi

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

Teorem 15.1

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ åpen og sammenhengende,
- $\mathbf{F}$ et glatt vektorfelt på D.

Da er følgende utsagn ekvivalente:

(1) $\mathbf{F}$ er konservativt på D.

(2) For $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in D$ og $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ to glatte orienterte kurver fra $\mathbf{p}$ til $\mathbf{q}$ i D har vi

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(Linjeintegralet av $\mathbf{F}$ er uavhengig av veien fra $\mathbf{p}$ til $\mathbf{q}$ i D.)

(3) For enhver lukket glatt kurve $\mathcal{C}$ i D har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Figurer

- https://earth.nullschool.net