TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 7
Multiple integraler II

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

22. februar 2021

NTNU | Kunnskap for en bedre verden

Nøkkelbegreper

- Variabelskifte for dobbeltintegraler
  - Jacobideterminanten
  - Dobbeltintegraler i polarkoordinater
- Trippelintegraler

Variabelskifte for dobbeltintegraler

Teorem 14.4
Anta at

- $T: S \to D$, $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, er én-én-tydig ($S, D \subseteq \mathbb{R}^2$),
- $x(u, v)$ og $y(u, v)$ er kontinuerlige med kontinuerlige partiellderiverte på S,
- $f: D \to \mathbb{R}$ er integrerbar.

Da er funksjonen

$$g(u, v) = f(T(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v))$$

integrerbar på S, og

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S g(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Jacobi-determinanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Merk: Vi tar *absoluttverdien* $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial y}{\partial u}\right|$ i integralet.

Trippelintegraler

- Trippelintegralet defineres igjen som en grenseverdi av Riemann-summer:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V_{ijk}$$

der $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.

Trippelintegraler

- Trippelintegralet defineres igjen som en grenseverdi av Riemann-summer:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i,j,k} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta V_{ijk}$$

  der $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.
- Tilsvarende egenskaper som dobbeltintegralet.

Trippelintegraler

- Trippelintegralet defineres igjen som en grenseverdi av Riemann-summer:
$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V_{ijk}$$
der $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.
- Tilsvarende egenskaper som dobbeltintegralet.
- $\iiint_D dV = \text{volum}(D)$.

Trippelintegraler

- Trippelintegralet defineres igjen som en grenseverdi av Riemann-summer:
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V_{ijk}$$
der $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.
- Tilsvarende egenskaper som dobbeltintegralet.
- $\iiint_D dV = \text{volum}(D)$.
- For $f(x,y,z) \geq 0$ er $\iiint_D f(x,y,z)\,dV$ geometrisk et 4-dimensjonalt "hypervolum"

Trippelintegraler

- Trippelintegralet defineres igjen som en grenseverdi av Riemann-summer:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V_{ijk}$$

  der $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.
- Tilsvarende egenskaper som dobbeltintegralet.
- $\iiint_D dV = \text{volum}(D)$.
- For $f(x,y,z) \geq 0$ er $\iiint_D f(x,y,z)\,dV$ geometrisk et 4-dimensjonalt "hypervolum"
- Mange andre fortolkninger, f.eks. er massen til et legeme $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$m = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dV$$

  der $\rho(x,y,z)$ er tettheten til legemet i punktet (x,y,z).

Itererte integraler

For

$$D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b,\ c(x) \leq y \leq d(x),\ e(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$$

har vi

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

og tilsvarende for andre rekkefølger av koordinatene.

Figurer

- https://www.math3d.org/SNN2cDe2
- https://www.math3d.org/EEP7FaHf