TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 6
Multiple integraler I

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

15./16. februar 2021

Nøkkelbegreper

- Dobbeltintegraler
  - Riemann-summer
  - Egenskaper til dobbeltintegraler
- Enkle (x-enkle, y-enkle) integrasjonsområder
- Itererte integraler
- Bytte av integrasjonsrekkefølge
- Uegentlige integraler for funksjoner med konstant fortegn
- Middelverdier for funksjoner av flere variabler

Riemann-summer i to variabler

- La $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ være et rektangel.

Riemann-summer i to variabler

- La $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ være et rektangel.
- En *partisjon* av R består av partisjoner

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

av $[a, b]$ og $[c, d]$.

Riemann-summer i to variabler

- La $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ være et rektangel.
- En *partisjon* av R består av partisjoner

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

  av $[a,b]$ og $[c,d]$.
- Notasjon: $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$,

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

  (arealet av R_{ij})

Riemann-summer i to variabler

- La $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ være et rektangel.
- En *partisjon* av R består av partisjoner

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

  av $[a,b]$ og $[c,d]$.
- Notasjon: $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$,

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

  (arealet av R_{ij})
- *Riemann-summen* $R(f,P)$ er

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$$

  der (x_{ij}^*, y_{ij}^*) er et vilkårlig punkt i R_{ij}

Definisjon av dobbeltintegralet

- *Normen* av P er definert som

$$\|P\| = \max_{i,j} \operatorname{diag}(R_{ij}),$$

der $\operatorname{diag}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}$ er diagonallengden til rektangelet R_{ij}.

Definisjon av dobbeltintegralet

- *Normen* av P er definert som

  $$\|P\| = \max_{i,j} \operatorname{diag}(R_{ij}),$$

  der $\operatorname{diag}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}$ er diagonallengden til rektangelet R_{ij}.

- Dobbeltintegralet av f over R er

  $$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\| \to 0} R(f,P)$$

  hvis denne grensen eksisterer — da er f *integrerbar* på R.

Eksistens av dobbeltintegraler

Teorem 14.1
Anta at

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er lukket og begrenset,
- randen av D består av endelig mange kurver av endelig lengde,
- $f : D \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.

Da er f integrerbar på D: dobbeltintegralet $\iint_D f(x,y)\, dA$ eksisterer.

Egenskaper til dobbeltintegraler

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ lukket og begrenset

(1) $\displaystyle\iint_D dA = \text{areal}(D)$

(2) Hvis $\text{areal}(D) = 0$, så er $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA = 0$ for alle f.

(3) Hvis f er integrerbar på D og $f(x,y) \geq 0$ for $(x,y) \in D$, så er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = V,$$

der V er *volumet* til legemet som ligger mellom grafen $z = f(x,y)$ og D.

(4) Hvis $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ der $D_1, D_2, \ldots, D_k$ er ikke-overlappende mengder og f er integrerbar på alle D_i, så er f integrerbar på D og

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \sum_{i=1}^{k} \iint_{D_i} f(x,y)\,dA.$$

Itererte integraler

Teorem 14.2

Anta at

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er lukket og begrenset,
- $f : D \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.

(1) Hvis D er y-enkel, $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x)\}$, har vi

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(2) Hvis D er x-enkel, $D = \{(x,y) : c \leq y \leq d, \quad a(y) \leq x \leq b(y)\}$, har vi

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Uegentlige dobbeltintegraler

Et *uegentlig dobbeltintegral* er et dobbeltintegral $\iint_D f(x,y)\,dA$ der integrasjonsområdet D og/eller integranden $f(x,y)$ er ubegrenset.

Hvis $f(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in D$ (eller $f(x,y) \leq 0$ for alle $(x,y) \in D$) eksisterer $\iint_D f(x,y)\,dA$ hvis vi kan skrive det som et iterert integral og de uegentlige integralene i én variabel vi da får alle eksisterer (konvergerer).

(Hvis f skifter fortegn er det vanskeligere å avgjøre om et uegentlig integral eksisterer. Dersom f er kontinuerlig holder det at $\iint_D |f(x,y)|\,dA$ eksisterer.)

Middelverdisetningen

- I én variabel: Hvis $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig så finnes det et tall c, $a < c < b$, slik at
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er *sammenhengende* hvis for all punkter $p, q \in D$ så finnes det en kontinuerlig kurve $\gamma\colon [0,1] \to D$ slik at $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$.

Teorem 14.3
Hvis $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er lukket, begrenset og sammenhengende, og $f\colon D \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, så finnes det et punkt $(x_0, y_0) \in D$ slik at

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{areal}(D)}\iint_D f(x,y)dA.$$