TMA4105 Matematikk 2 — Oversiktsforelesning 4

Sigrid Grepstad

Institutt for matematiske fag

Nøkkelbegreper — Uke 5

- Kjerneregel for funksjoner av flere variabler
- Lineær approksimasjon
- Deriverbarhet for funksjoner av flere variabler
- Gradient og retningsderivert
- Implisitt funksjonsteorem

Kjerneregler

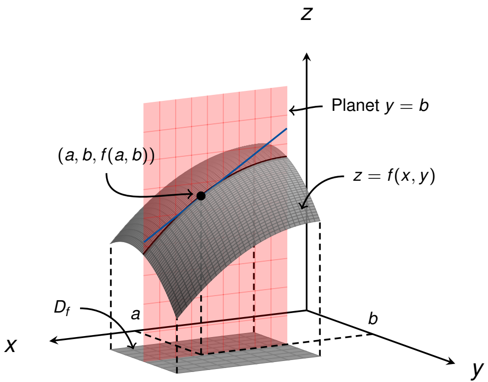
Hvis z er en funksjon av x og y med kontinuerlige første ordens partiellderiverte, og x og y er deriverbare funksjoner av t, så er:

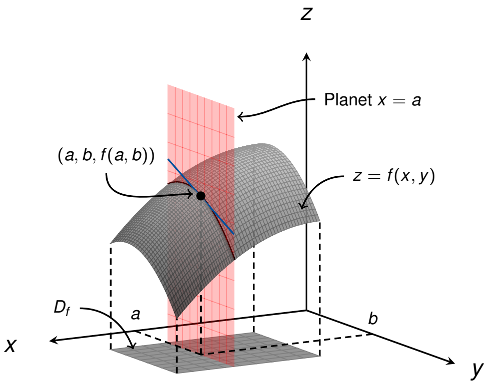
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Hvis z er en funksjon av x og y med kontinuerlige første ordens partiellderiverte, og x og y avhenger av r og s, så er:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

OF3 — Partiellderivasjon

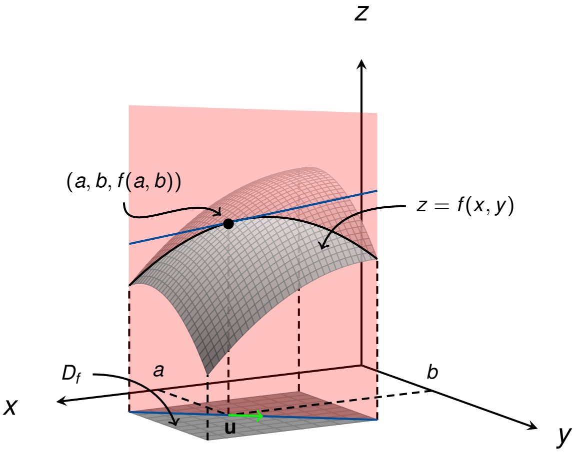




$$D_{\mathbf{i}} f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

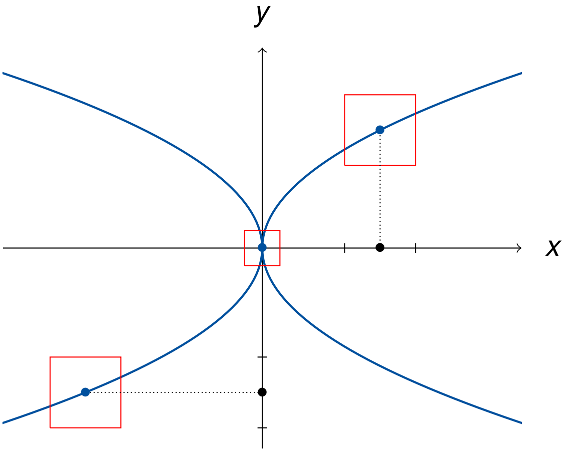
$$D_{\mathbf{j}} f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

Retningsderivert



$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\,\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

Implisitte funksjoner



Kurven gitt ved $f(x, y) = x^2 - y^4 = 0$

Implisitt funksjonsteorem i $\mathbb{R}^2$

La D være en åpen delmengde av $\mathbb{R}^2$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}$ være en funksjon av variablene x og y med kontinuerlige første ordens partiellderiverte.

Anta at punktet $(a, b) \in D$ oppfyller $f(a, b) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

Da finnes det en deriverbar funksjon $g\colon A \to \mathbb{R}$, hvor A er intervallet $(a - \varrho, a + \varrho)$ for en $\varrho > 0$, som oppfyller $g(a) = b$ og

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Den deriverte er

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Implisitt funksjonsteorem i $\mathbb{R}^{n+1}$

La D være en åpen delmengde av $\mathbb{R}^{n+1}$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}$ være en funksjon av variablene $\mathbf{x}$ og y med kontinuerlige første ordens partiellderiverte.

Anta at punktet $(\mathbf{a}, b) \in D$ oppfyller $f(\mathbf{a}, b) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$.

Da finnes det en deriverbar funksjon $g\colon A \to \mathbb{R}$, hvor $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varrho\}$ for en $\varrho > 0$, som oppfyller $g(\mathbf{a}) = b$ og

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0.$$

De partiellderiverte er

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}.$$

Figurer i math3d.org

- Illustrasjon av gradient: https://www.math3d.org/YyIFerjo
- Retningsderivert: https://www.math3d.org/JLbwzjTA