



NTNU

Kunnskap for en bedre verden

TMA4105 Matematikk 2 — Oversiktsforelesning 2

Sigrid Grepstad

Institutt for matematiske fag



Nøkkelbegreper — Uke 3

- Vektorvaluerte funksjoner av én variabel
 - Deriverbarhet
 - Derivasjonsregler: produktregler og kjerneregelen
- Kurver gitt ved vektorvaluert funksjon
 - Glatte kurver
 - Buelengden til kurver
 - Enhetstangentvektor og enhetsnormalvektor
 - Krumning til kurver

Teorem 11.1

La \mathbf{u} og \mathbf{v} være to deriverbare vektorvaluerte funksjoner, og la λ være en deriverbar skalarfunksjon. Da gjelder:

$$(a) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

$$(b) \quad \frac{d}{dt} (\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$$

$$(c) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

$$(d) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t) \quad (\text{bare i } \mathbb{R}^3)$$

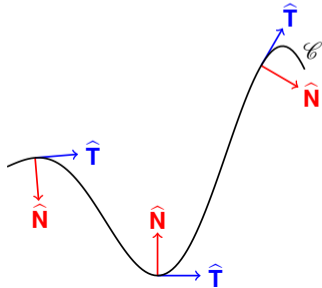
$$(e) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\lambda(t)) = \mathbf{u}'(\lambda(t))\lambda'(t)$$

$$(f) \quad \frac{d}{dt} |\mathbf{u}(t)| = \frac{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|} \quad (\text{dersom } \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0})$$

Enhetstangent, krumning og enhetsnormal

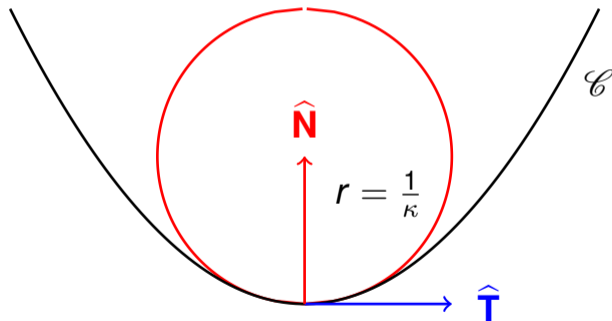
La $\mathbf{r}(t)$ være en glatt parametrisering med $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ og $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$. Da er:

- enhetstangenten gitt ved $\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$
- krumningen gitt ved $\kappa(t) = \frac{|\hat{\mathbf{T}}'(t)|}{v(t)}$
- hvis $\kappa(t) \neq 0$ så er enhetsnormalen gitt ved $\hat{\mathbf{N}}(t) = \frac{\hat{\mathbf{T}}'(t)}{|\hat{\mathbf{T}}'(t)|}$



Smygsirkel (Osculating circle)

Smygsirkelen til en kurve i et punkt er sirkelen som skjærer kurven i punktet og som har samme enhetstangent, enhetsnormal og krumning som kurven i punktet.



I \mathbb{R}^3 ligger smygsirkelen i *smygplanet*, som spennes ut av $\hat{\mathbf{T}}$ og $\hat{\mathbf{N}}$. Normalvektoren til smygplanet, $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}$, kalles *binormalen*.

Figurer i math3d.org

- Eksempel spiral: <https://www.math3d.org/JNAn6l1r>
- Eksempel smygplan: <https://www.math3d.org/AwEgumL1>