TMA4105 MATEMATIKK 2

Oversiktsforelesning 11
Divergens, curl og Greens teorem

Rune Haugseng
Institutt for matematiske fag, NTNU

22. mars 2021

Nøkkelbegreper

- Divergensen til et vektorfelt
- Curlen til et vektorfelt
- Vektorpotensial
- Greens teorem

Tolkning av div og curl

La **F** være et glatt vektorfelt definert i en omegn av $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

Teorem 16.1
La $\mathcal{S}_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^3$ være sfæren med sentrum **p** og radius ϵ, med $\hat{\mathbf{N}}$ enhetsnormalen som peker utover. Da er

$$(\operatorname{div} \mathbf{F})(\mathbf{p}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

Tolkning av div og curl

La **F** være et glatt vektorfelt definert i en omegn av $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

Teorem 16.1

La $\mathcal{S}_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^3$ være sfæren med sentrum **p** og radius ϵ, med $\hat{\mathbf{N}}$ enhetsnormalen som peker utover. Da er

$$(\operatorname{div} \mathbf{F})(\mathbf{p}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

Teorem 16.2

La $\mathcal{C}_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^3$ være sirkelen med sentrum **p**, radius ϵ, i planet med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$. Da er

$$(\operatorname{curl} \mathbf{F})(\mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{N}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Regneregler for div og curl

Teorem 16.3

La f, g være skalarfelt og **F**, **G** vektorfelt, alle slik at blandede partiellderiverte er like.

(a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

(b) $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$

(c) $\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$

(d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

(e) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$

(f) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$

(g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

(h) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$

(i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$