

Interaktiv forelesning uke 16

Våren 2021

Læringsoppgaver

- 1 La $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{\sin z}, x, xe^{\sin z} \cos z)$, og la \mathcal{C} være skjæringskurven mellom planet $x - 2y - 5z = 8$ og den elliptiske sylinderflaten $(x - 5)^2 + (y/2)^2 = 1$. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når \mathcal{C} er orientert mot klokken sett ovenfra.

- 2 La T være området i \mathbb{R}^3 begrenset av paraboloidene $z = x^2 + (y+1)^2$ og $z = 10 - x^2 - (y-1)^2$, og la \mathcal{C} betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, x^2 + y^2)$.

- a) Regn ut

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS,$$

der ∂T er randen til T og enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ peker ut fra T .

- b) Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der \mathcal{C} er orientert mot klokken sett ovenfra.

- U Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

- a) Regn ut $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der \mathcal{C} er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, orientert mot klokken sett ovenfra.

- b) Regn ut $\text{curl } \mathbf{F}$, og drøft resultatet og resultatet i a) i lys av Stokes' teorem.

STACK-oppgaver

- 1 La \mathcal{C} være skjæringskurven mellom sylindere $4x^2 + y^2 = 3$ og grafen til en glatt funksjon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dvs. flaten $z = f(x, y)$. Kurven er orientert mot klokken sett ovenfra. Regn ut integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} -y^3 dx + 4x^3 dy - 3z^2 dz.$$

- 2 Temperaturen i et rom er gitt ved funksjonen

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2}(4x^2 + 5y^2 + 4z^2).$$

Ved tiden $t = 0$ flyr en flue gjennom punktet $(\sqrt{3}, 1, 2)$ langs skjæringskurven mellom de to flatene $z = x^2 - y^2$ og $z^2 = x^2 + y^2$.

Hvor stor temperaturendring, $\frac{dT}{dt}$, opplever fluen ved $t = 0$ dersom dens vertikale hastighet ved dette tidspunktet er 4?