TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 15

Våren 2021

Læringsoppgaver

$\boxed{1}$ La T være det lukkede området i $\mathbb{R}^3$ som ligger mellom de to halvkuleflatene $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x \geq 0$ og $x^2+y^2+z^2 = 9$, $x \geq 0$. La $\mathcal{S} = \partial T$ være overflaten til T.

Bestem fluksen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, xz, 2)$ ut av flaten $\mathcal{S}$, dvs. bestem

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er en enhetsnormalvektor som peker ut av $\mathcal{S}$.

$\boxed{2}$ Et legeme T er begrenset av planet $-2y + z = 4$ og paraboloiden $x^2 + (y-1)^2 + z = 9$.

a) Finn volumet av T.

b) La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - yz)\mathbf{i}$, og la $\mathcal{S} = \partial T$ være overflaten til T. Bestem fluksintegralet

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ som peker ut av $\mathcal{S}$.

c) Bestem også

$$\iint_{\mathcal{S}'} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\mathcal{S}'$ er den delen av $\mathcal{S}$ som ligger i planet $-2y + z = 4$.

$\boxed{\text{U}}$ Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{for} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

La $\mathcal{S}$ være kuleflaten med sentrum i $(0, 0, 0)$ og radius 1.

a) Vis at $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ der $\mathbf{F}(x, y, z)$ er definert.

b) Vis at

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = -4\pi,$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen som peker ut av kulen.

c) Forklar hvorfor resultatene i **a)** og **b)** ikke er i strid med Divergensteoremet.

STACK-oppgaver

$\boxed{1}$ La D være området i $\mathbb{R}^3$ som er avgrenset av flatene $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 8}$, $z = 0$ og $z = 4$. Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z, y + x, z + 2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} \, dS,$$

der $\mathcal{S}$ er den krumme delen av randen til D og $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ med positiv z-komponent.

$\boxed{2}$ Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (8x + 8x^3 z, -2y(x^2 + z^2), -(12x^2 z^2 + 8y^2 z)), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Finn området T i $\mathbb{R}^3$ slik at

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} \, dS$$

er størst mulig, der ∂T er randen til T og $\widehat{\mathbf{N}}$ peker ut av T.