

Interaktiv forelesning uke 12

Våren 2021

Læringsoppgaver

- 1 Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, -3y, 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ikke har et vektorpotensial, altså at det ikke finnes noe vektorfelt \mathbf{G} slik at

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \text{curl } \mathbf{G}(x, y, z)$$

for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- 2 La R være området i \mathbb{R}^2 som tilfredsstillir ulikhetene $x^2 + y^2 \leq 1$ og $y \geq 0$.

- a) Regn ut

$$\iint_R (4 - x) dx dy.$$

- b) La $\mathcal{C} = \partial R$ være randen til R orientert mot klokken, og la \mathcal{C}' være den krumme delen av \mathcal{C} . Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}'} (xy + \ln(x^2 + 1)) dx + (4x + e^{y^2} + 3 \arctan y) dy.$$

- U La \mathcal{S}_r være kuleflaten med sentrum i origo og radius r , og la vektorfeltet \mathbf{F} være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$. La $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalen til \mathcal{S}_r som peker utover. La $V(r)$ være volumet innenfor \mathcal{S}_r , og definer funksjonen $f(r)$ ved

$$f(r) = \iint_{\mathcal{S}_r} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Finn et uttrykk for $f(r)$, og bestem grenseverdien

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(r)}{V(r)}.$$

Sammenlign denne grenseverdien med en fysisk fortolkning av divergensen til \mathbf{F} .

STACK-oppgaver

- 1 La \mathcal{C} være randen til den delen av disken med sentrum i origo og radius 1 som ligger i første kvadrant, orientert mot klokken. Bruk Greens teorem til å regne ut integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} (2y^2 - 4x\sqrt{x^2 + y^2}) dx + (4xy + 3y\sqrt{x^2 + y^2}) dy.$$

Svaret skal være et eksakt, rasjonalt tall.

- 2 La $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$, og la \mathcal{C} være randen til D orientert mot klokken. Regn ut integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} (\sin(x^2) - y^2) dx + (\cos(y^2) + 3xy) dy$$

ved å bruke Greens teorem.