Skriftlig innlevering 4

Våren 2021

Innleveringsfrist: 23. april 2021, kl. 16.00.

$\boxed{1}$ La S være den delen av paraboloiden $z = (x^2 + y^2)/2$ som ligger innenfor kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Vis at projeksjonen av S ned i xy-planet er sirkelskiven

$$x^2 + y^2 \leq 2,$$

og regn ut arealet av S.

$\boxed{2}$ La $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(xe^{2z}, ye^{2z}, -e^{2z}\big)$.

Vis at $\mathbf{F}$ er divergensfritt, og bestem to ulike vektorpotensial til $\mathbf{F}$. Det vil si, bestem to vektorfelt $\mathbf{G}$ og $\mathbf{H}$, $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$, som er slik at $\operatorname{curl} \mathbf{G}(x, y, z) = \operatorname{curl} \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

$\boxed{3}$ La D være det lukkede området avgrenset av x-aksen og grafen til $y = 4 - x^2$. La $C = \partial D$ være randen til D orientert i positiv omløpsretning. Bruk Greens teorem til å beregne linjeintegralet

$$\oint_{\mathcal{C}} (\sin x + y^2)\, dx + (\cos x - xy)\, dy.$$

(Vink: I det integralet du får å regne ut til slutt, kan det være lurt å gjøre bruk av egenskaper til like og odde funksjoner.)

$\boxed{4}$ La S være den delen av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ der $z \geq 3$, og la T være legemet begrenset av S og planet $z = 3$.

a) Bestem volumet til T.

b) Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(-x^2 y, xy^2, z\big)$. Finn verdien av flateintegralet (fluksintegralet)

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til S med positiv $\mathbf{k}$-komponent.

(Vink: Legg merke til at S ikke er en lukket flate.)