TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 8

Våren 2021

De fleste av oppgavene er hentet fra læreboken Calculus 2, 9.utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Regn ut Gaussintegralet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$\boxed{2}$ For hvilke verdier av k konvergerer integralet nedenfor? Hvis det konvergerer, regn det også ut.

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^k}\,dA.$$

Svaret skal begrunnes.

$\boxed{3}$ Regn ut trippelintegralet:

$$\int_0^1\int_z^1\int_0^x e^{x^3}\,dy\,dx\,dz.$$

$\boxed{4}$ La P være parallellogrammet avgrenset av $y=2x$, $y=2x-2$, $y=x$ og $y=x+1$. Evaluer $\iint_P xy\,dx\,dy$ ved å gjøre variabelskiftene

$$x=u-v, \qquad y=2u-v.$$

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{\text{Eksamen S2010, Oppg. 3}}$ Et dobbeltintegral blir ved iterert integrasjon

$$I=\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{y(1+x^2)}}=\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\sqrt{y(1+x^2)}}dx\right)dy.$$

a) Skisser området D og beregn integralet I ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.

b) Regn ut integralet I ved å benytte variabelskiftet $(u,v)\mapsto(u,u^2v)=(x,y)$. Vis først at området D i xy-planet tilsvarer området R i uv-planet bestemt av ulikhetene $0\leq u\leq 1$ og $0\leq v\leq 1$. Det oppgis at

$$dxdy=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{matrix}\right\|dudv.$$

$\boxed{14.4.7}$ Beregn dobbeltintegralet:

$$\iint_Q y\,dA$$

der Q er kvartdisken gitt ved $x\geq 0, y\geq 0$ og $x^2+y^2\leq a^2$.

Eksamen V2016, Oppg. 7 La D være området i første kvadrant (det vil si $x \leq 0$ og $y \leq 0$) som er avgrenset av ellipsene $4x^2 + y^2 = 16$ og $4x^2 + y^2 = 1$. Skisser området D og regn ut

$$\iint_D \frac{x}{4x^2 + y^2} dA.$$

14.5.29 Definer gjennomsnittverdien til en integrerbar funksjon $f = f(x, y, z)$ over et område R i rommet. Finn så gjennomsnittverdien til $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ over kuben $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Kjente formler Bruk dobbeltintegraler for å utlede de kjente formlene for volumet av:

- en sylinder med høyde h og radius r;
- en kule med radius R;
- en kjegle med høyde h og radius r.

Areal Bruk polarkoordinater som variabelskifte og transformasjonsformelen for to variabler til å utlede arealformelen for et område innesluttet av en polarkurve $r = f(\theta)$ som du lærte i uke 2. Bruk tilsvarende idé med bruk av variabelskifte til å finne arealet innesluttet av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Eksamen V2015, Oppg. 8 Området D er avgrenset av kurvene gitt ved $y^2 - x^2 = 1$, $y^2 - x^2 = 4$, $x = -y/2$ og $x = y/2$ for $y > 0$. Finn en variabelsubstitusjon som transformerer D til et rektangel, og bruk denne til å beregne

$$\iint_D \frac{y^2 - x^2}{y^2} \, dA.$$

Hint: Regningen blir kanskje enklere om du uttrykker $du\, dv$ ved $dx\, dy$ enn om du gjør det omvendt.