TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 15

Våren 2021

De fleste av oppgavene er hentet fra læreboken Calculus 2, 9.utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Finn fluksen til $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y^2, y^2-z^2, z)$ gjennom kuleflaten med sentrum i origo og radius $a > 0$.

$\boxed{2}$ Et legeme R med konstant massetetthet har volum V og massesenter i $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Finn fluksen til

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 - x - 2y,\ 2y^2 + 3y - z,\ z^2 - 4z + xy)$$

ut av overflaten til R uttrykt ved V og $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

$\boxed{3}$ La D være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antakelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. Vis at for alle glatte vektorfelt $\mathbf{F}$ så gjelder:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0.$$

$\boxed{4}$ Beregn fluksintegralet

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (5x^2 + ye^y, 3y^2, z),$$

der $\mathcal{S}$ er den øvre halvsfæren definert av $x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 0$, og enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv $\mathbf{k}$-komponent.

$\boxed{5}$ Halvkulen T er bestemt av $x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0$. Vi lar $\mathcal{S}$ være den krumme delen av overflaten til T. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x(z+z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}.$$

Regn ut $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ og finn fluksen

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren med positiv z-komponent.

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{\text{Fluks til konstant vektorfelt}}$ Vis at fluksen til et konstant vektorfelt gjennom en lukket glatt og orientert flate i rommet alltid er 0.

$\boxed{\text{Eksamen S2003, Oppg. 6a) og 6b)}}$

$\boxed{\text{Eksamen V1998, Oppg. 5}}$

$\boxed{\text{Eksamen S2000, Oppg. 6}}$

$\boxed{16.4.1}$ Finn fluksen til $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ gjennom sfæren med sentrum i origo og radius $a > 0$.

$\boxed{16.4.20}$ La D være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antakelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. Vis at volumet til D er gitt ved

$$V = \frac{1}{3} \oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Ekstra spørsmål: kunne vi erstattet integranden med et annet vektorfelt og kontstanten 1/3 med noe annet?

$\boxed{16.4.27}$ La D være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antakelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. La ϕ, ψ være glatte skalarfelt og la $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ betegne den retningsderiverte til ϕ i retningen av $\hat{\mathbf{N}}$. Vis at

$$\iiint_D \Delta\phi\, dV = \oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS,$$

der $\Delta\phi = \nabla^2\phi$ betegner Laplacen til ϕ.

$\boxed{16.4.28}$ Samme antakelser som i 16.4.27. Vis nå at (dette er en såkalt *Green type formel*):

$$\iiint_D (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)\, dV = \oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \left(\phi\frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial \phi}{\partial n}\right) dS.$$

$\boxed{16.4.29}$ Samme antakelser som i 16.4.28. Vis at

$$\iiint_D \nabla\phi\, dV = \oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \phi\hat{\mathbf{N}}\, dS$$

ved å anvende divergensteoremet på $\mathbf{F} := \phi\mathbf{c}$ der $\mathbf{c}$ er et vilkårlig konstant vektorfelt.