TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 12

Våren 2021

De fleste av oppgavene er hentet fra læreboken Calculus 2, 9.utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning

1 La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, -yz^2, zx^2).$$

Finn div $\mathbf{F}$, curl $\mathbf{F}$ og div(curl $\mathbf{F}$).

2 Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y + 4x^3y^3,\ y^3 + x + 3x^4y^2)$$

er konservativt.

3 Finn et vektorpotensial for

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3xy^2z, 4xz - y^3z, 1).$$

4 Evaluer $\oint_{\mathcal{C}}(\sin x + 3y^2)\,dx + (2x - e^{-y^2})\,dy$, der $\mathcal{C}$ er randen til halvdisken $x^2 + y^2 \le a^2,\ y \ge 0$ orientert mot klokken.

5 Bruk Greens teorem til å beregne arealet inni ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Oppgaver med løsningsforslag

To identiteter Anta uendelig glatthet for alle involverte funksjoner f og vektorfelt $\mathbf{F}$. Vis at vi da alltid har:

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad}(f)) = \mathbf{0}$$
$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}(\mathbf{F})) = 0.$$

Eksamen S2016, Oppg. 7 La $\mathcal{C}$ være randen til firkanten med hjørner i $(-2, 1)$, $(-2, -3)$, $(1, 0)$ og $(1, 7)$, der $\mathcal{C}$ er orientert mot urviseren.

Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} xy\,dx + 2x\,dy.$$

Eksamen V2012, Oppg. 5 **a)** Ligninga $4x^2 + 24x + 9y^2 = 0$ beskriver en ellipse. Finn senteret til ellipsen, samt lengden til den store og lille halvaksen, og skisser ellipsen.

b) Den rette linja $y = \frac{-2}{\sqrt{3}}x$ deler ellipsen i to deler. La C være den korteste av disse delene, orientert fra høyre mot venstre. Finn

$$\int_C -y\,dx + x\,dy.$$

(Hint: Parametriseringen $x = 3\cos t - 3,\ y = 2\sin t$ kan brukes.)

c) Regn ut arealet avgrenset av C og linja $y = \frac{-2}{\sqrt{3}}x$.
(Hint: Greens teorem kan brukes.)

$\boxed{16.1.3}$ Finn divergensen og curl til $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

$\boxed{16.1.9}$ Finn divergensen og curl til $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r,\theta) = r\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$, der (r,θ) er polarkoordinater.

$\boxed{16.1.13}$ La $\mathbf{F}$ være et glatt to-dimensjonelt vektorfelt. Hvis $\mathcal{C}_\varepsilon$ er sirkelen med radius ε sentrert i origo og $\hat{\mathbf{N}}$ er den utadpekende enhetsnormalen til $\mathcal{C}_\varepsilon$, vis at

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,ds = \operatorname{div}(\mathbf{F})(0,0).$$

$\boxed{16.2.9}$ La $\mathbf{r} = (x,y,z), r := |\mathbf{r}|$. Anta at f er en deriverbar funksjon av én variabel. Vis at

$$\nabla\cdot(f(r)\mathbf{r}) = rf'(r) + 3f(r).$$

Finn $f(r)$ hvis $f(r)\mathbf{r}$ er divergensfritt.