TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 11

Våren 2021

De fleste av oppgavene er hentet fra læreboken Calculus 2, 9.utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Finn den totale ladningen på flaten

$$\mathbf{r}(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, u), \qquad (0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \pi)$$

når ladningstettheten er gitt ved $\delta = \sqrt{1 + e^{2u}}$.

$\boxed{2}$ Finn fluksen til $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ ut gjennom kula $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$\boxed{3}$ La $\mathcal{S}$ være den delen av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger over planet $2x + z = 1$. Vi orienterer $\mathcal{S}$ ved å velge enhetsnormalen $\mathbf{n}$ slik at den peker oppover (med andre ord: $\mathbf{n}$ skal ha positiv z-komponent). Finn fluksen gjennom $\mathcal{S}$ av vektorfeltet $\mathbf{F} = \mathbf{k}$, dvs. regn ut integralet

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

$\boxed{4}$ Finn en parametrisering av hyberboloiden

$$x^2 + y^2 - z^2 = 25.$$

$\boxed{5}$ La $\hat{\mathbf{N}}$ være den utadpekende enhetsnormalen til en glatt og orientert flate $\mathcal{S}$ i rommet. Vis at fluksen til $\hat{\mathbf{N}}$ ut av $\mathcal{S}$ er arealet av $\mathcal{S}$.

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{15.5.2}$ Verifiser at flateelementet (arealelemetet) dS til den sfæriske flaten $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ er gitt i sfæriske koordinater (kulekoordinater) ved $dS = a^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta$.

$\boxed{15.5.7}$ Finn $\iint_{\mathcal{S}} x\, dS$ over den delen av den parabolske sylinderen $z = x^2/2$ som ligger inne i første oktant av sylinderen $x^2 + y^2 = 1$.

$\boxed{15.5.13}$ Finn $\iint_{\mathcal{S}} y\ dS$ der $\mathcal{S}$ er den delen av planet $z = 1 + y$ som ligger inne i kjeglen $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

$\boxed{15.5.15}$ Finn $\iint_{\mathcal{S}} xz\ dS$ der $\mathcal{S}$ er den delen av flaten $z = x^2$ som ligger i første oktant inne i paraboloiden $z = 1 - 3x^2 - y^2$.

$\boxed{15.6.1}$ Finn fluksen til $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j}$ ut av tetraederet begrenset av koordinatplanene og planet $x + 2y + 3z = 6$.

$\boxed{\text{Eksamen V2004, Oppg. 3}}$ La S være flaten bestemt ved

$$z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad z \geq 0.$$

Skisser S, og beregn fluksen opp gjennom S av vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\mathbf{i} + (3x^2y + y^3 - x^3)\mathbf{j} + (z + 1)\mathbf{k}.$$

$\boxed{\text{Eksamen S2009, Oppg. 4}}$ La S være den delen av flaten

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

som ligger i første oktant, under planet $z = 2$.

Beregn arealet av S.