TMA4105 Matematikk 2

Anbefalte oppgaver uke 10

Våren 2021

De fleste av oppgavene er hentet fra læreboken Calculus 2, 9.utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning

$\boxed{1}$ Bestem strømningslinjene til hastighetsfeltet gitt ved $\mathbf{v}(x, y) = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

$\boxed{2}$ Bestem strømningslinjene til vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{r}} + \theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

$\boxed{3}$ Evaluer linjeintegralet

$$\int_{\mathcal{C}} (x + y)ds$$

over kurven

$$\mathbf{r} = at\mathbf{i} + bt\mathbf{j} + ct\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq m.$$

$\boxed{4}$ La vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$, og kurven $\mathcal{C}$ være gitt ved $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ fra $(0, 0, 0)$ til $(1, 1, 1)$. Beregn linjeintegralet av tangentialkomponenten til $\mathbf{F}$ langs $\mathcal{C}$.

$\boxed{5}$ Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y + 4x^3y^3,\ y^3 + x + 3x^4y^2)$$

er konservativt. Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der $\mathcal{C}$ er kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2e^t \cos t, 2e^t \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Oppgaver med løsningsforslag

$\boxed{15.1.3}$ Skisser vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ i planet og bestem dets feltlinjer.

$\boxed{15.2.3}$ Avgjør om vektorfeltet er konservativt, og hvis ja, finn en tilhørende potensialfunksjon:

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}.$$

$\boxed{15.2.5}$ Samme som i 15.2.3, men med vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy - z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} - (2zx - y^2)\mathbf{k}.$$

$\boxed{15.2.7}$ Finn det 3-dimensjonale vektorfeltet med potensial

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}.$$

$\boxed{15.2.9}$ Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\mathbf{k}$$

er konservativt og finn en potensialfunksjon til denne. Beskriv ekvipotensialflatene og finn feltlinjene.

$\boxed{15.3.2}$ Regn ut $\int_{\mathcal{C}} y\, ds$ der $\mathcal{C}$ er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t^2, t, t^2),\ 0 \le t \le m$.

$\boxed{15.3.15}$ La $\mathcal{C}$ være den delen av skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = a^2$ og planet $z = x$ som ligger i første oktant. Regn ut $\int_{\mathcal{C}} x\, ds$.

$\boxed{15.4.17}$ Regn ut de lukkede kurveintegralene

a) $\oint_{\mathcal{C}} x\, dy$,

b) $\oint_{\mathcal{C}} y\, dx$,

langs $\mathcal{C}$ gitt som randen av den øvre halvdisken $x^2 + y^2 \le a^2, y \ge 0$, orientert mot klokka.