Anbefalte oppgaver uke 5, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

27. januar 2020

Nummererte oppgaver er hentet fra lærerboken *Calculus 2*, 9.utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning:

- Eksamen våren 2007, oppgave 1 (gradient og retningsderivert).
- Eksamen sommeren 2005, oppgave 1 (tangentplan).
- Eksamen sommeren 2011, oppgave 4 (kjerneregel).
- Eksamen våren 2002, oppgave 2 (retningsderivert)
- Eksamen våren 2002, oppgave 8 (linær approksimasjon og implisitt derivasjon).
- **Laplace operator i polarkoordinater:** la $f = f(x, y)$ være en funksjon av to variabler slik at Δf finnes, der vi minner om (dette ble også gjennomgått i plenumsregningen i forrige uke) at Laplacen til f, Δf, i kartesiske koordinater, tar formen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Finn Δf i polarkoordinater (r, θ). **Hint:** kjerneregel.
- **Retningsderivert og Leibniz regel**: vis at den retningsderiverte $D_{\mathbf{u}}|_{\mathbf{p}}$ i et punkt $\mathbf{p}$ og retningen $\mathbf{u}$ tilfredstiller *Leibniz regelen* (også kjent som produkt-regelen (for derivasjon)). Det vil si: vis at, for si to glatte funksjoner f, g, så har vi:

$$D_{\mathbf{u}}(fg)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})D_{\mathbf{u}}g(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{p}).$$

Oppgaver med løsningsforslag:

- **Lineæriseringen til konstante, linære og affine funksjoner:** la $f = f(\mathbf{x})$ være en flervariabel funksjon (si av n-variable). Finn lineæriseringen til f i et punkt $\mathbf{p}$ dersom:
  (a) $f(\mathbf{x})$ er en konstant funksjon. Det vil si $f(\mathbf{x}) = c$ for alle $\mathbf{x}$ for en eller annen $c \in \mathbb{R}$.
  (b) $f(\mathbf{x})$ er en såkalt linær funksjon. Det vil si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ for en eller annen $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.
  (c) $f(\mathbf{x})$ er en såkalt affin funksjon. Det vil si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$ der $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, b \in \mathbb{R}$.
- 12.5.3: bruk kjerneregelen til å finne

$$\frac{\partial z}{\partial u}$$

hvis $z = g(x, y)$ der $y = f(x), x = h(u, v)$.

- 12.6.1: bruk en passende lineærisering til å finne en approksimert verdi til funksjonen

$$f(x,y) = x^2y^3$$

i punktet $(3.1, 0.9)$.

- **Deriverbarhet til skalarprodukt**: la $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ være to vektorer i $\mathbb{R}^n$. Skalarproduktet mellom de to er definert til å være

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Det går an å vise at g er deriverbar fra definisjonen direkte (du kan gjerne prøve(!)). Vi skal midlertidig her se på spesialtilfellet at $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ og definere $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Vis at f er deriverbar fra definisjonen direkte. Vis at g er deriverbar om du ikke blir påkrevd å gjøre dette direkte fra definisjonen? **Hint:** kjenner du til noe teorem som kan være til hjelp?

- 12.7.17: i hvilken retning har funksjonnen $f(x,y) = xy$ i punktet $(2,0)$ endringsrate -1? Hva med -3? Hva med -2?

- 12.7.31: Hvis $\nabla f(x,y) = 0$ i hele disken $x^2 + y^2 < r^2$, konkluder med at f er konstant på hele disken.

- 12.8.1: gitt likningen

$$xy^3 + x^4y = 2,$$

finn $\frac{\partial x}{\partial y}$.

- Eksamen våren 1999, oppgave 3. Vi bytter ut a) til: finn en parametrisering for skjæringskurven mellom de to flatene. Dette trengs i b).