Anbefalte oppgaver uke 4, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

20. januar 2020

Nummererte oppgaver er hentet fra lærerboken *Calculus 2*, 9.utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning:

- 10.5.12: Identifiser flaten representert ved likningen $y = z^2$ og skisser den.
- 12.2.13: Betrakt
$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x^3y^3}{x^2 + y^2}$$
for $(x, y) \neq 0$. Bestem $f(0, 0)$ slik at f er kontinuerlig i hele planet.
- 12.3.7: Finn alle førsteordens partielle deriverte til
$$f(x, y) = \sin(x\sqrt{y})$$
og evaluer disse i punktet $(\pi/3, 4)$.
- **Kontinuitet av sammensatte funksjoner**: Anta at f er en funksjon av n variable og at g er en funksjon av én variabel, slik at sammensetningen $h := g \circ f$ definert ved $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ er definert for alle $\mathbf{x}$ i definisjonsmengden D_f til f. Anta videre at f er kontinuerlig i $\mathbf{a}$ og at g er kontinuerlig i $f(\mathbf{a})$. Vis at da er h kontinuerlig i $\mathbf{a}$. Bruk definisjonen til kontinuitet.
- 12.4.15: Anta at $u = u(x, y), v = v(x, y)$ er kontinuerlige differensierbare av andre orden. Vi sier at u og v tilfredsstiller **Cauchy-Riemann likningene** hvis
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
Vis at hvis u og v tilfredstiller Cauchy-Riemann likningene, så er begge harmoniske: det vil si, $\Delta u = \Delta v = 0$ der Laplace operatoren Δ er gitt ved (i kartesiske koordinater): $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ for en (glatt nok) funskjon $f = f(x, y)$.
- **Tangentplan og en kvadratisk flate**: Betrakt den kvadratiske flaten gitt ved $z = x^2 + 2y^2$.
  (a) Hva slags kurver får vi for z lik konstant?
  (b) Hva slags kurver får vi for y lik konstant?
  (c) Hva slags kurver får vi for x lik konstant?
  (d) Hva slags flate er dette? Skisser den?
  (e) Finn likningen til tangentplanet i et punkt (a, b, c) på flaten. Hva blir likningen for $a = 2, b = 1$?

Oppgaver med løsningsforslag:

- 10.5.10: Identifiser flaten representert ved likningen $x^2 + 4z^2 = 4$ og skisser den.
- 12.3.6: Finn alle førsteordens partielle deriverte til

  $$w = \ln(1 + e^{xyz})$$

  og evaluer disse i punktet $(2, 0, -1)$.
- 12.3.8: Finn alle førsteordens partielle deriverte til

  $$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

  og evaluer disse i punktet $(-3, 4)$.
- 12.4.1: Finn alle andreordens partielle deriverte til

  $$z = x^2(1 + y^2).$$

- 12.4.11: Vis at funksjonen

  $$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

  er harmonisk i hele planet untatt i origo.